MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

17. BAND 3./4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 17. AUGUST 1923)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

17. Band. **Inhalt:** 3./4. Heft.

Seite

Schouten, J. A., Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. I. 161

Schouten, J. A., Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. II. 183

Timpe, A., Die Airysche Funktion für den Ellipsenring 189

Saxer, W., Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten . . . 206

Fekete, M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten 228

van der Corput, J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme 250

Rogosinski, W., Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten 260

Jänichen, W., Über einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz 277

Weyl, H., Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe 293

Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen.

Von

J. A. Schouten in Delft.

§ 1.

Einleitung.

In den Arbeiten von G. Hessenberg[1]), H. Weyl[2]), R. König[3]) und dem Verfasser[4]) hat sich nach und nach gezeigt, daß die gewöhnliche Differentialgeometrie der V_n[5]) als Spezialfall einer weit umfassenderen Geometrie aufgefaßt werden kann. Im Mittelpunkte dieser Geometrie steht der Begriff der Übertragung, eine Verallgemeinerung des von T. Levi Civita[6]) und dem Verfasser[7]) eingeführten Begriffes des „parallel" oder „geodätisch" bewegten Bezugssystems. Es gibt so viele Differentialgeometrien, wie es Übertragungen gibt. Eine vollständige Aufzählung der linearen Übertragungen findet sich in der oben erwähnten Arbeit des Verfassers, deren Inhalt Gegenstand eines Vortrages auf dem Kongreß Jena 1921 war.

[1]) Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. 78 (1916), S. 187–217.

[2]) Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 384–411.

[3]) Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 28 (1920), S. 213–228.

[4]) Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können, Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 56–81, Nachtrag 15 (1922), S. 168, im folgenden zitiert als Ü.

[5]) Es bedeute im folgenden X_n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, V_n eine X_n mit quadratischer Maßbestimmung, und R_n eine X_n mit euklidischer Maßbestimmung.

[6]) Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana, Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917), S. 173–205.

[7]) Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam 12, Nr. 6 (1918), 95 S.

Eine andere Untersuchungsreihe, die ebenfalls eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differentialgeometrie anstrebt und zur sogenannten Affingeometrie führte, hebt mit den Arbeiten von W. Blaschke, G. Pick, J. Radon u. a. an[8]).

L. Berwald gelang es zunächst die Affingeometrie für n Dimensionen aufzustellen[9]), sodann eine allgemeinere Geometrie zu begründen[10]), die infolge freier Wahl der pseudonormalen Richtung die gewöhnliche Differentialgeometrie in V_n und die Affingeometrie umfaßt. Es erhebt sich nun die Frage, ob die Berwaldsche Geometrie und damit die Affingeometrie als spezieller Fall in der Lehre der linearen Übertragungen enthalten ist, in dem Sinne, daß man, ausgehend von einer X_{n-1} in einer X_n mit der allgemeinsten linearen Übertragung, durch geeignete Spezialisierung von selbst zu diesen verschiedenen Geometrien gelangt. Daß eine Beziehung zwischen den beiden Untersuchungsreihen besteht, ist schon durch die Arbeiten von R. König sichergestellt[11]). König geht, was die Affingeometrie betrifft, aus von einer X_2 in R_3 mit ihrer Affinnormalen und zeigt, daß die Vektoren auf der X_2 sich vom Standpunkte einer höheren Übertragung betrachten lassen. Über die hier aufgeworfene weitergehende Frage geben seine Arbeiten aber noch keinen Aufschluß.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß diese Frage in der Tat im bejahenden Sinne zu beantworten ist und ferner, daß bei einer bestimmten Übertragung, der inhaltstreuen Übertragung II c, eine Geometrie existiert, die die naturgemäße Erweiterung der Berwaldschen Geometrie ist und sich zu dieser verhält wie die Geometrie einer V_{n-1} in V_n zur Geometrie einer V_{n-1} in R_n.

Die Untersuchung ist ausgeführt in dem für höhere Übertragungen erweiterten Ricci-Kalkül, der sich vom gewöhnlichen Ricci-Kalkül nur wenig unterscheidet und in der oben erwähnten Arbeit ausführlich dargestellt wurde. Der Radiusvektor tritt also nirgends auf und auch die Hessenbergschen Pseudotensoren brauchen nicht verwendet zu werden. Die Methode läßt sich sehr leicht auch auf das Problem der X_m in X_n anwenden und gestattet somit die affingeometrischen Untersuchungen in

[8]) Eine Übersicht der bisherigen Arbeiten findet sich Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **31** (1922), S. 64.

[9]) Die Grundgleichungen der Hyperflächen im euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten, Monatsh. f. Math. und Phys. **32** (1922), S. 89—106.

[10]) Zur Geometrie einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit im $(n+1)$-dimensionalen Euklidisch-affinen Raum, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **31** (1922), S. 162—170.

[11]) Ein Beitrag zur Grundlegung der affinen Geometrie, Leipz. Ber. **71** (1919), S. 3—19. — Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. **28** (1919), S. 213—228.

einer bisher nicht verfolgten Richtung zu ergänzen. Die auf diesen letzten Punkt bezüglichen Resultate sollen in einer anschließenden Mitteilung veröffentlicht werden.

Herrn L. Berwald in Prag, mit dem ich seit September 1921 in regem Gedankenaustausch stand und der mir seine Manuskripte schon vor der Drucklegung freundlichst zur Verfügung stellte, schulde ich Dank für manche wichtige Bemerkung in bezug auf den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

§ 2.

Die Größen der A_n und der X_{n-1}.

Eine allgemeine lineare Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n ist gegeben durch die Gleichungen[12] [13])

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\mu}, \\ &\text{b)}\quad \nabla_\mu w_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} + w_\nu \Gamma'^\nu_{\lambda\mu}, \end{aligned} \qquad \lambda, \mu, \nu = a_1, \ldots, a_n.$$

Die affine Übertragung (II c) [14]) entsteht für

$$(2)\qquad \Gamma^\nu_{\lambda\mu} = -\Gamma'^\nu_{\lambda\mu},$$

$$(3)\qquad \Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}.$$

Eine X_n mit dieser Übertragung heiße A_n. Für eine A_n gelten folgende Hauptgleichungen[15]):

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \nabla_\mu p = \frac{\partial p}{\partial x^\mu}, \\ &\text{b)}\quad \nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} p = 0; \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} v^\nu = -R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} v^\lambda, \\ &\text{b)}\quad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} w_\lambda = R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} w_\nu \end{aligned}$$

---

[12]) ∇_μ ist abkürzend gesetzt für das Hessenbergsche Symbol $\frac{\delta}{\delta x^\mu}$ der kovarianten Differentiation.

[13]) Ü. S. 63.

[14]) Ü. S. 72.

[15]) Es bedeute stets:

$$p_{[\omega} q_{\mu]} = \frac{1}{2}(p_\omega q_\mu - p_\mu q_\omega)$$

$$p_{[\omega} q_\mu r_{\nu]} = \frac{1}{6}(p_\omega q_\mu r_\nu + p_\mu q_\nu r_\omega + p_\nu q_\omega r_\mu - p_\omega q_\nu r_\mu - p_\mu q_\omega r_\nu - p_\nu q_\mu r_\omega).$$

für jede beliebige Wahl der Größen p, v^ν und w_λ, wo $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ die Krümmungsgröße der Übertragung II c ist:

$$(6) \qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma_{\lambda\omega}^{\nu} - \Gamma_{\varkappa\omega}^{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\varkappa} + \Gamma_{\varkappa\mu}^{\nu}\Gamma_{\lambda\omega}^{\varkappa}.$$ [16])

Wird $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, so wird die A_n eine euklidischaffine Mannigfaltigkeit E_n. Eine E_n ist eine projektive Mannigfaltigkeit, in welcher eine $n-1$-dimensionale ebene Mannigfaltigkeit ausgezeichnet ist. Eine E_n läßt sich stets in eine R_n überführen, indem man irgendeinen in E_n konstanten Tensor zweiten Grades als Fundamentaltensor einführt.

Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \nabla_\mu v^{\nu_1\cdots\nu_p} = r_\mu^{\cdot\nu_1\cdots\nu_p}, \\ &\text{b)} \quad \nabla_\mu w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = s_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} \end{aligned}$$

lauten

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad 2\nabla_{[\omega} r_{\mu]}^{\cdot\nu_1\cdots\nu_p} = -\sum_i R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu_i} v^{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\lambda\nu_{i+1}\cdots\nu_p}, \\ &\text{b)} \quad 2\nabla_{[\omega} s_{\mu]\lambda_1\ldots\lambda_p} = \sum_l R_{\omega\mu\lambda_l}^{\cdot\cdot\cdot\nu} w_{\lambda_1\ldots\lambda_{l-1}\nu\lambda_{l+1}\ldots\lambda_p}. \end{aligned}$$

Ein infinitesimales Gebiet um einen Punkt P einer A_n kann als E_n aufgefaßt werden. In diesem Gebiet kann jeder kontravariante Vektor in P dargestellt werden durch einen Pfeil, jeder kovariante durch ein System zweier paralleler E_{n-1} mit einem von der einen zur anderen E_{n-1} zeigenden Sinn. Die Bestimmungszahlen des kovarianten Vektors sind die reziproken Werte der Stücke, die durch die beiden E_{n-1} aus den Koordinatenachsen ausgeschnitten werden, gemessen durch die zu den Achsen gehörigen Maßeinheiten.

Legt man in der A_n eine X_{n-1}, so kann man bei einem beliebigen kontravarianten Vektor v^ν in P nicht von einer X_{n-1}-Komponente sprechen. Erst wenn irgendeine nicht in X_{n-1} liegende Richtung als „pseudonormal" eingeführt wird, hat v^ν in bezug auf diese Richtung eine X_{n-1}-Komponente, nämlich ihre Projektion auf X_{n-1} in der pseudonormalen Richtung. Bei einem kovarianten Vektor in P verhält sich die Sache ganz anders. Ein einziger, t_λ, ist bis auf einen Zahlenfaktor ausgezeichnet, der X_{n-1} tangierende.

Jeder andere, u_λ, bestimmt (durch Schnitt) eindeutig, und ohne daß eine pseudonormale Richtung gegeben ist, einen kovarianten Vektor w_λ' der X_{n-1}. Letztere Größe kann dargestellt werden durch eine Doppel-E_{n-2} mit einem Sinn und ist also von einer ganz anderen Art als u_λ. Wählt

[16]) Ü S. 66, 75, 77.

man die Urvariablen einmal vorübergehend so, daß x^{a_n} über X_{n-1} konstant ist, so ist

$$w'_\alpha = u_\alpha \qquad (\alpha = a_1, \ldots, a_{n-1}), \tag{9}$$

während w'_{a_n} unbestimmt ist. Bei Übergang zu anderen Urvariablen transformieren sich die w'_λ wie die u_λ $(\lambda = a_1, \ldots, a_n)$, die w'_λ können also alle Werte $u_\lambda + \varkappa t_\lambda$ annehmen, wo $\varkappa$ alle möglichen Zahlenwerte durchläuft. Die Vektoren $u_\lambda + \varkappa t_\lambda$ schneiden alle aus X_{n-1} den kovarianten Vektor w'_λ aus.

Erst wenn eine pseudonormale Richtung eingeführt ist, kann man w'_λ in eindeutiger Weise die Bestimmungszahlen des Vektors w_λ zuordnen, der durch w'_λ und diese Richtung bestimmt ist. Da diese beiden Größen dann dieselben Bestimmungszahlen haben, können sie (dem Kleinschen Klassifizierungsprinzipe gemäß) identifiziert werden. w_λ kann dann als X_{n-1}-Komponente von u_λ in bezug auf die gewählte Richtung betrachtet werden. Die Größe

$$A_\lambda^\nu = A_\lambda^* A^\nu = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \nu \text{ (nicht summieren)}, \\ 0 \text{ für } \lambda \neq \nu \end{cases} \tag{10}$$

ist der *Einheitsaffinor* der X_n. Es ist $A_\lambda^\lambda = n$ und

$$\nabla_\mu A_\lambda^\nu = 0. \text{ [17]} \tag{11}$$

(Das * des ersten idealen Faktors soll verhindern, daß bei dem später verwendeten Herauf- und Herunterziehen der Indizes der erste mit dem zweiten Faktor verwechselt wird, was zu Fehlern führen würde.) Ebenso existiert ein Einheitsaffinor B_λ^ν der X_{n-1}. Wählt man die Urvariablen vorübergehend so, daß x^{a_n} über X_{n-1} konstant ist, so ist

$$B_\lambda^\nu = B_\lambda^* B^\nu = \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ für } \lambda = \nu \text{ (nicht summieren)}, \\ 0 \text{ für } \lambda \neq \nu \end{matrix} \right\} \lambda, \nu = a_1, \ldots, a_{n-1}. \tag{12}$$

Die Bestimmungszahlen von B_λ^ν für eine beliebige Wahl der Urvariablen lassen sich aus (12) nicht in eindeutiger Weise ableiten, da für $\lambda = a_n$ oder $\nu = a_n$ jede Angabe fehlt. B_λ^ν ist eben eine Größe der X_{n-1}, nicht der X_n, und durchaus anderer Art als A_λ^ν. Die Mehrdeutigkeit der Bestimmungszahlen B_λ^ν für allgemeine Wahl der Urvariablen verhindert aber nicht, daß der Ausdruck $B_\nu^\lambda u_\lambda$ in eindeutiger Weise den durch Schnitt mit u_λ in X_{n-1} entstehenden kovarianten Vektor w'_λ darstellt:

$$B_\nu^\lambda u_\lambda = w'_\lambda. \tag{13}$$

Auch ist stets $B_\lambda^\lambda = n - 1$. Dagegen hat der Ausdruck $B_\nu^\lambda v^\nu$, wenn keine pseudonormale Richtung eingeführt ist, keine Bedeutung. Wird eine solche

[17] Ü. S. 64, für A_λ^ν ist dort das Zeichen $\varepsilon_\lambda^{\ \nu}$ verwendet.

Richtung eingeführt und wählt man n^ν in dieser Richtung, während man t_λ und n^ν irgendwie so normiert, daß

$$t_\lambda n^\lambda = 1, \tag{14}$$

so kann man setzen

$$B^\nu_\lambda = A^\nu_\lambda - t_\lambda n^\nu \tag{15}$$

und es wird dann $B^\lambda_\nu u_\lambda$ bzw. $B^\lambda_\nu v^\nu$ die X_{n-1}-Komponente von u_λ bzw. v^ν. n^ν heißt der *Pseudonormalvektor*. Ebenso ist dann die X_{n-1}-Komponente einer gemischten Größe höheren Grades, z. B. $u^{\cdot\lambda\mu}_{\varkappa\,\cdot\,\cdot\,\nu}$, gegeben durch die Gleichung:

$$w^{\cdot\lambda\mu}_{\varkappa\,\cdot\,\cdot\,\nu} = B^{\alpha\lambda\mu\delta}_{\varkappa\beta\gamma\nu}\, u^{\cdot\beta\gamma}_{\alpha\,\cdot\,\cdot\,\delta}, \tag{16}$$

wo $B^{\alpha\lambda\mu\delta}_{\varkappa\beta\gamma\nu}$ abkürzend für $B^\alpha_\varkappa B^\lambda_\beta B^\mu_\gamma B^\delta_\nu$ eingeführt ist.

§ 3.

Die in X_{n-1} induzierte Übertragung. Beweis, daß $X_{n-1} = A_{n-1}$.

Berechnet man für einen beliebigen Vektor v^ν den Ausdruck $(\nabla_\mu v^\alpha A^*_\alpha) A^\nu$,[18]) so ist, da $v^\alpha A^*_\alpha$ ein Skalar ist:

$$(\nabla_\mu v^\alpha A^*_\alpha) A^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} v^\alpha A^*_\alpha\right) A^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda A^\nu \frac{\partial A^*_\lambda}{\partial x^\mu}. \tag{17}$$

Bis jetzt haben aber nur die n^3 Ausdrücke

$$A^*_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu + A^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^*_\lambda = \frac{\partial A^*_\lambda}{\partial x^\mu} = 0 \tag{18}$$

reale Bedeutung, nicht aber ein jeder der $2n^3$ Ausdrücke $\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} A^*_\lambda$, $A^\nu \frac{\partial A^*_\lambda}{\partial x^\mu}$. Die Rechnung erlangt nun eine bemerkenswerte Einfachheit, wenn man diesen $2n^3$ Ausdrücken reale Bedeutung verleiht durch Hinzufügung der n^3 Gleichungen

$$A^\nu \frac{\partial A^*_\lambda}{\partial x^\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}, \tag{19}$$

die mit (18) nicht unverträglich sind. Es ist dann

$$\nabla_\mu v^\nu = (\nabla_\mu v^\lambda A^*_\lambda) A^\nu, \tag{20a}$$

[18]) Die differentiierende Wirkung von ∇_μ erstrecke sich stets bis zur erstfolgenden *schließenden* Klammer, deren zugehörige *öffnende* Klammer ∇_μ vorangeht.

während für die kovarianten Vektoren der A_n ebenso gilt:

$$\boxed{\nabla_\mu w_\lambda = (\nabla_\mu w_\nu A^\nu) A^*_\lambda}. \tag{20b}$$

Solange keine pseudonormale Richtung eingeführt ist, hat die Anwendung des Operators ∇_μ auf kovariante und gemischte Größen der X_{n-1} keinen Sinn. Zuerst sei nun gezeigt, daß bei gegebener pseudonormaler Richtung aus der Übertragung IIc in A_n eine Übertragung IIc in der X_{n-1} abgeleitet werden kann. Man wähle dazu für B^*_λ und B^ν die X_{n-1}-Komponenten von A_λ und A^ν:

$$\begin{aligned} B^*_\lambda &= A_\lambda - A^*_\alpha n^\alpha t_\lambda, \\ B^\nu &= A^\nu - A^\alpha t_\alpha n^\nu, \end{aligned} \tag{21}$$

und definiere dann die Übertragung in der X_{n-1} folgendermaßen:

$$\nabla'_\mu p = B^\alpha_\mu \nabla_\alpha p, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \nabla'_\mu v^\nu = (\nabla'_\mu v^\lambda B^*_\lambda) B^\nu, \\ &\text{b)} \quad \nabla'_\mu w_\lambda = (\nabla'_\mu w_\nu B^\nu) B^*_\lambda. \end{aligned} \tag{23}$$

Infolge (15) und (19) haben die Ausdrücke (23) reale Bedeutung. Da infolge (21) und (22):

$$(\nabla'_\mu v^\lambda B^*_\lambda) B^\nu = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} (\nabla_\alpha v^\lambda A^*_\lambda) A^\beta = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_\alpha v^\beta, \tag{24}$$

ist

$$\boxed{\nabla'_\mu v^\nu = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_\alpha v^\beta} \tag{25a}$$

und ebenso beweist man

$$\boxed{\nabla'_\mu w_\lambda = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha w_\beta}, \tag{25b}$$

welche Gleichungen besagen, daß die Ableitung in X_{n-1} die X_{n-1}-Komponente der Ableitung in A_n ist. Da infolge (25) die Beziehungen (2) und (3) auch für die in dieser Weise definierte Übertragung in X_{n-1} gelten, hat diese Übertragung die Eigenschaften von IIc. Die X_{n-1} ist also mit dieser Übertragung eine A_{n-1}. Die Übertragung kann auch durch (25) definiert werden.

Für ein ganz in der A_{n-1} liegendes Feld v^ν bzw. w_λ ist infolge (25):

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \nabla'_\mu v^\nu = B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha v^\beta) B^\nu_\beta = B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu - v^\beta B^\alpha_\mu \nabla_\alpha B^\nu_\beta, \\ &\text{b)} \quad \nabla'_\mu w_\lambda = B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha w_\beta) B^\beta_\lambda = B^\alpha_\mu \nabla_\alpha w_\lambda - w_\beta B^\alpha_\mu \nabla_\alpha B^\beta_\lambda, \end{aligned} \tag{26}$$

oder infolge (11) und (15):

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \boxed{B^a_\mu \nabla_a v^\nu = \nabla'_\mu v^\nu - v^\beta B^a_\mu (\nabla_a t_\beta) n^\nu} \\ &\text{b)}\quad \boxed{B^a_\mu \nabla_a w_\lambda = \nabla'_\mu w_\lambda - w_\beta B^a_\mu (\nabla_a n^\beta) t_\lambda} \end{aligned}.$$

Nun ist $B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha t_\beta$ symmetrisch:

$$(28)\qquad B^{\alpha\beta}_{[\mu\lambda]} \nabla_\alpha t_\beta = 0,$$

da $t_\lambda A_{n-1}$ tangiert. Man sieht dies am einfachsten ein, wenn man vorübergehend die Urvariablen so wählt, daß x^{a_n} über A_{n-1} konstant ist. Sodann ist t_λ bis auf einen Zahlenfaktor, der Funktion des Ortes ist, gleich $\nabla_\lambda x^{a_n}$, und (28) folgt dann aus (4b). (28) ist aber eine von der Wahl der Urvariablen unabhängige Beziehung und gilt also allgemein. Aus (15) folgt dann aber, daß auch $B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha B^\nu_\beta$ ebenfalls symmetrisch ist in λ und μ:

$$(29)\qquad B^{\alpha\beta}_{[\mu\lambda]} \nabla_\alpha B^\nu_\beta = 0.$$

Durch die Wahl der Richtung von n^ν und die Normierung (14) von t_λ und n^ν entstehen in A_{n-1} zwei Größen, erstens der kovariante Tensor:

$$(30)\qquad \boxed{h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda} = B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \nabla_\alpha t_\beta},$$

zweitens der gemischte Affinor:

$$(31)\qquad \boxed{l_\mu^{\ \nu} = B^{\alpha\nu}_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\beta}.$$

§ 4.

Die Gleichungen von Gauß und Codazzi.

Durch nochmalige Differentiation von (27a) ergibt sich

$$(32)\qquad B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\gamma} \nabla_\beta B^\delta_\alpha \nabla_\delta v^\gamma = \nabla'_\omega \nabla'_\mu v^\nu - B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\gamma} \nabla_\beta v^\delta B^\varepsilon_\alpha (\nabla_\varepsilon t_\delta) n^\gamma,$$

woraus folgt, da $B^{\beta\alpha}_{\omega\mu} \nabla_\beta B^\delta_\alpha$ symmetrisch in ω und μ ist:

$$(33)\qquad B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\gamma} \nabla_{[\beta} \nabla_{\alpha]} v^\gamma = \nabla'_{[\omega} \nabla'_{\mu]} v^\nu - v^\delta B^{\beta\ \alpha\ \nu}_{[\omega\mu]\gamma} (\nabla_\alpha t_\delta) \nabla_\beta n^\gamma,$$

oder infolge (5a), (30) und (31):

$$(34)\qquad \boxed{B^{\beta\alpha\nu\delta}_{\omega\mu\gamma\lambda} R^{\cdots\gamma}_{\beta\alpha\delta\cdot} = R'^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda\cdot} + 2 l^{\ \nu}_{[\omega} h_{\mu]\lambda}},$$

wo $R'^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda\cdot}$ die Krümmungsgröße der A_{n-1} ist.

Dies ist die für A_{n-1} in A_n verallgemeinerte Gaußsche Gleichung.

Wendet man auf diese Gleichung die auch für die Übertragung IIc gültige[19]) verallgemeinerte Bianchische Identität

(35) $$V_{[\xi} R_{\omega\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$$

an, so folgt:

(36) $$-B^{\delta\beta\alpha}_{\lambda[\omega\mu} l^{\cdot\nu}_{\xi]} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} t_\gamma - B^{\nu\beta\alpha}_{\gamma[\omega\mu} h_{\xi]\lambda} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} n^\delta = 2 V'_{[\xi} l^{\cdot\nu}_{\omega} h_{\mu]\lambda}.$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (30) und (31) lauten:

(37) $$B^{\beta\alpha\delta}_{\omega\mu\lambda} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} t_\gamma = 2 V'_{[\omega} h_{\mu]\lambda} - 2 B^{\alpha}_{[\mu} h_{\omega]\lambda} (V_\alpha t_\gamma) n^\gamma,$$

(38) $$B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\gamma} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} n^\delta = -2 V'_{[\omega} l^{\cdot\nu}_{\mu]} + 2 B^{\alpha}_{[\mu} l^{\cdot\nu}_{\omega]} (V_\alpha n^\delta) t_\delta.$$

Dies sind die verallgemeinerten Gleichungen von Codazzi. Substituiert man diese Werte in (36), so entsteht:

(39) $$-2 l^{\cdot\nu}_{[\xi} V'_{\omega} h_{\mu]\lambda} + 2 l^{\cdot\nu}_{[\xi} B^{\alpha}_{\mu} h_{\omega]\lambda} (V_\alpha t_\gamma) n^\gamma + 2 (V'_{[\omega} l^{\cdot\nu}_{\mu}) h_{\xi]\lambda} - 2 l^{\cdot\nu}_{[\omega} B^{\alpha}_{\mu} h_{\xi]\lambda} (V_\alpha n^\gamma) t_\gamma = 2 V'_{[\xi} l^{\cdot\nu}_{\omega} h_{\mu]\lambda},$$

oder

(40) $$2 V'_{[\xi} l^{\cdot\nu}_{\omega} h_{\mu]\lambda} = 2 l^{\cdot\nu}_{[\omega} V'_{\xi} h_{\mu]\lambda} + 2 h_{\lambda[\mu} V'_{\xi} l^{\cdot\nu}_{\omega]}.$$

(36) ist also eine Folge von (37). Umgekehrt gelingt es nicht die Gleichungen von Codazzi aus der Bianchischen Identität abzuleiten.

§ 5.

Einführung einer weiteren Bedingung für t_λ und n^ν.

Bis hier ist über die Größe von t_λ noch nichts vorausgesetzt. Es sei jetzt angenommen, daß außer (14) auch die Gleichung

(41a) $$\boxed{B^{\alpha}_{\mu} (V_\alpha n^\lambda) t_\lambda = 0},$$

die infolge (14) äquivalent ist mit:

(41b) $$\boxed{B^{\alpha}_{\mu} (V_\alpha t_\lambda) n^\lambda = 0}$$

gelten soll. (41a) besagt, daß das Differential von n^λ für jede in A_{n-1} gelegene Verrückung ganz in A_{n-1} liegt.

Infolge (41) bekommen (30) und (31) die Gestalt

(42) $$h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda} = B^{\alpha}_{\mu} V_\alpha t_\lambda$$

(43) $$l^{\cdot\nu}_{\mu} = B^{\alpha}_{\mu} V_\alpha n^\nu$$

[19]) Für den Beweis siehe: Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 111–115.

Wir beweisen nun zunächst den Satz:

Hat der Tensor $h_{\lambda\mu}$ den Rang $n-1$, und existiert bei irgendeiner bis auf einen konstanten Zahlenfaktor festen Wahl von t_λ eine pseudonormale Richtung, so daß (14) *und* (41) *gelten, so ist diese Richtung die einzig mögliche.*

In der Tat, existierten zwei Vektoren, n^ν und N^ν, die beide den Gleichungen (14) und (41) genügen, so würde für den Vektor $s^\nu = n^\nu - N^\nu$ gelten:

$$t_\lambda s^\lambda = 0, \tag{44}$$

$$B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha t_\lambda) s^\lambda = 0. \tag{45}$$

(44) besagt aber, daß s^λ in der A_{n-1} liegt, und (45) ist infolgedessen äquivalent mit:

$$h_{\mu\lambda} s^\lambda = 0. \tag{46}$$

Ist aber $h_{\lambda\mu}$ nicht degeneriert, so ist (46) nur möglich für $s^\lambda = 0$, q. e. d. Ist $h_{\lambda\mu}$ in jedem Punkte der A_{n-1} degeneriert, so bedeutet dies geometrisch, daß die A_{n-1} überdeckt ist mit Kurven, denen entlang sich die tangierende E_{n-1} pseudoparallel im Sinne der Übertragung IIc der A_n bewegt.

Auch die Umkehrung des Satzes gilt:

Bei einer bestimmten pseudonormalen Richtung ist bis auf einen konstanten Zahlenfaktor nur eine einzige Normierung von t_ν und n^ν möglich, bei der sowohl (14) *als* (41) *gelten.*

In der Tat, ist gleichzeitig

$$B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha t_\lambda) n^\lambda = 0, \quad B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha \sigma t_\lambda) \frac{1}{\sigma} n^\lambda = 0, \tag{47}$$

so folgt unmittelbar:

$$\nabla'_\alpha \sigma = 0. \tag{48}$$

Zweitens beweisen wir den Satz:

Ist die Richtung von n^ν fest gewählt, und werden t_λ und n^ν in irgendeiner Weise so normiert, daß (14) *gilt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Normierung so abgeändert werden kann, daß auch* (41) *gilt, daß bei der beliebig gewählten Normierung $w_\mu = B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha t_\lambda) n^\lambda$ ein Gradientvektor in A_{n-1} ist.*

In der Tat, soll es eine Zahl σ geben, so daß

$$B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha \sigma t_\lambda) \frac{1}{\sigma} n^\lambda = 0, \tag{49}$$

so muß gelten:

$$\nabla' \log \sigma + w_\mu = 0, \tag{50}$$

q. e. d.

Die Integrabilitätsbedingungen (37) von (30) und (31) gehen, wenn (41) gilt, über in die einfacheren

$$(51)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad B^{\beta\alpha\delta}_{\omega\mu\lambda} R_{\beta\alpha\delta}{}^{\gamma} t_\gamma = 2 V'_{[\omega} h_{\mu]\lambda}, \\ &\text{b)}\quad B^{\beta\alpha\nu}_{\omega\mu\gamma} R_{\beta\alpha\delta}{}^{\gamma} n^\delta = -2 V'_{[\omega} l_{\mu]}{}^{\nu}, \end{aligned}$$

welche die Integrabilitätsbedingungen von (42, 43) sind und auch direkt aus diesen Gleichungen abgeleitet werden können. Ist die A_n eine E_n, d. h. ist $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = 0$, so bekommt (51) die einfachere Form

$$(52)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad V'_{[\omega} h_{\mu]\lambda} = 0, \\ &\text{b)}\quad V'_{[\omega} l_{\mu]}{}^{\nu} = 0. \end{aligned}$$

Aus (52) kann man wieder die Bianchische Gleichung (36) ableiten, die hier die einfache Form

$$(36\text{a})\qquad V'_{[\xi} l_{\omega}{}^{\nu} h_{\mu]\lambda} = 0$$

annimmt. Ebenso folgt (52b) aus (52a) und (36a), vorausgesetzt, daß $h_{\lambda\mu}$ den Rang $n-1$ hat. Denn aus (52a) und (36a) folgt:

$$(53)\quad \begin{aligned} 0 = 6 (V'_{[\xi} l_{\omega}{}^{\nu}) h_{\mu]\lambda} = &(V'_{\xi} l_{\omega}{}^{\nu} - V'_{\omega} l_{\xi}{}^{\nu}) h_{\mu\lambda} + (V'_{\omega} l_{\mu}{}^{\nu} - V'_{\mu} l_{\omega}{}^{\nu}) h_{\xi\lambda} \\ &+ (V'_{\mu} l_{\xi}{}^{\nu} - V'_{\xi} l_{\mu}{}^{\nu}) h_{\omega\lambda}. \end{aligned}$$

Ist nun $h_{\lambda\mu}$ vom Range $n-1$, so existiert ein Tensor $k^{\lambda\mu}$ in A_{n-1}, so daß

$$(54)\qquad h_{\lambda\mu} k^{\mu\nu} = B^{\nu}_{\lambda}, \qquad h_{\lambda\mu} k^{\lambda\mu} = n-1,$$

und aus (53) folgt bei Überschiebung mit $k^{\lambda\mu}$:

$$(55)\qquad \{2(n-1) - 2 - 2\}\, V_{[\xi} l_{\omega]}{}^{\nu} = 0.$$

Ebenso folgt (52a) aus (36a) und (52b), vorausgesetzt, daß $l_i{}^{\nu}$ den Rang $n-1$ hat[20]). In derselben Weise und unter denselben Voraussetzungen ist auch (37) eine Folge von (38) und (36) und (38) eine Folge von (37) und (36).

§ 6.

Die inhaltstreuen Übertragungen.

Ist $I^{\nu_1 \cdots \nu_n}$ ein n-Vektor:

$$(56)\qquad I^{\nu_1 \cdots \nu_n} = I^{[\nu_1 \cdots \nu_n]},$$

so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei pseudoparalleler Bewegung von $I^{\nu_1 \cdots \nu_n}$ einer geschlossenen Kurve entlang Anfangswert und Endwert gleich sind, daß die Gleichung

$$(57)\qquad V_{\mu} I^{\nu_1 \cdots \nu_n} = 0$$

[20]) Diese Eigenschaften der A_{n-1} in E_n mit dem Beweis verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn L. Berwald.

unbeschränkt integrabel ist. Ist dies der Fall, so nennen wir die Übertragung *inhaltstreu*. Die Integrabilitätsbedingungen von (57) sind

$$\sum_i R_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\nu_i} I^{\nu_1\dots\nu_{i-1}\lambda\nu_{i+1}\dots\nu_n} = 0, \tag{58}$$

oder, da $I^{\nu_1\dots\nu_n}$ alternierend ist:

$$R_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots[\nu_1} I^{\nu_2\dots\nu_n]\lambda} = 0. \tag{59}$$

Da aber allgemein die Gleichung

$$v^{[\nu_1} I^{\nu_2\dots\nu_n]\lambda} w_\lambda = 0 \tag{60}$$

gleichbedeutend ist mit

$$v^\lambda w_\lambda = 0 \tag{61}$$

ist die einfachste Form der Integrabilitätsbedingungen

$$\boxed{R_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\lambda} = 0}. \text{ [21]} \tag{62a}$$

Wendet man auf (62a) die für $R_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\nu}$ gültige „zweite Identität" $R_{[\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}]}^{\dots\dots\nu} = 0$ [22]) an, so bekommt man eine andere Form der Bedingungen:

$$R_{[\mu\lambda]} = 0, \tag{62b}$$

die mit (62a) gleichwertig ist. Es soll nun folgender Satz bewiesen werden:

Liegt eine X_{n-1} in einer X_n mit inhaltstreuer Übertragung IIc *und ist die pseudonormale Richtung in irgendeiner Weise so gewählt, daß den bei den Gleichungen* (14) *und* (41) *durch geeignete Normierung von t_λ und n^ν genügt werden kann, so ist die in der X_{n-1} vermittels* (25) *induzierte Übertragung ebenfalls eine inhaltstreue Übertragung* IIc.

Differentiation von (41b) ergibt

$$\nabla'_{[\omega} B^\alpha_{\mu]} (\nabla_\alpha t_\lambda) n^\lambda = B^{\beta\alpha}_{[\omega\mu]} \nabla_\beta (\nabla_\alpha t_\lambda) n^\lambda = 0 \tag{63}$$

oder

$$B^{\beta\alpha}_{\omega\mu} R_{\beta\alpha\dot{\lambda}}^{\dots\dots\nu} t_\nu n^\lambda = -2 B^{\beta\alpha}_{[\omega\mu]} (\nabla_\alpha t_\lambda) (\nabla_\beta n^\lambda). \tag{64}$$

Aus (34) folgt aber

$$B^{\beta\alpha}_{\omega\mu} R_{\beta\alpha\dot{\lambda}}^{\dots\dots\nu} B^\lambda_\nu = R'^{\dots\dots\lambda}_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}} + 2 B^{\beta\alpha}_{[\omega\mu]} (\nabla_\alpha t_\lambda) (\nabla_\beta n^\nu) B^\lambda_\nu, \tag{65}$$

[21]) Damit eine allgemeine lineare Übertragung inhaltstreu ist, ist notwendig und hinreichend, daß $R_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\lambda} = 0$ und $U_{\omega\mu\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\lambda} = 0$. Infolge Ü. (93), (40), (25), (26), (35a) und (37) ist dann auch

$$A^\alpha_{[\mu} \nabla_{\omega]} (\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} + \Gamma'^\lambda_{\lambda\alpha}) - \frac{1}{2} (\Gamma^\varkappa_{\omega\mu} - \Gamma^\varkappa_{\mu\omega}) C_{\varkappa\dot{\imath}\dot{\lambda}}^{\dots\dots\lambda} = 0.$$

[22]) Ü. S. 77.

und durch Addition von (64) und (65) ergibt sich infolge (41)

$$(66) \qquad B^{\beta\alpha}_{\omega\mu} R_{\dot\beta\alpha\dot\lambda}{}^{\dot\lambda} = R'_{\omega\mu\dot\lambda}{}^{\dot\lambda} - 2B^{\beta\alpha}_{[\omega\mu]}(V_\alpha t_\lambda)(V_\beta n^\nu) t_\nu n^\lambda = R'_{\omega\mu\dot\lambda}{}^{\dot\lambda}.$$

Ist also $R_{\dot\beta\alpha\dot\lambda}{}^{\dot\lambda} = 0$, so ist auch $R'_{\omega\mu\dot\lambda}{}^{\dot\lambda} = 0$, q. e. d.

Der Beweis kann auch anders geführt werden. Gilt für $I^{\nu_1\cdots\nu_n}$ die Gleichung (58), so ist $t_{\nu_1} I^{\nu_1\cdots\nu_n}$ ein ganz in X_{n-1} liegender $(n-1)$-Vektor und es ist infolge (41) und (57):

$$(67) \qquad V'_\mu t_{\nu_1} I^{\nu_1\cdots\nu_n} = 0.$$

Die Übertragung in der X_{n-1} ist also inhaltstreu.

§ 7.

Festlegung der pseudonormalen Richtung.

Ein besonderer Fall der A_n ist die V_n. In einer V_n existiert ein Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$ und es verschwindet demzufolge der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren. Wählt man für n^ν den Einheitsvektor senkrecht zur X_{n-1} und $t_\lambda = n_\lambda = n^\nu g_{\lambda\nu}$, so sind sowohl (14) als (41) erfüllt, die X_{n-1} wird eine V_{n-1} und es entsteht die gewöhnliche Differentialgeometrie der V_{n-1} in V_n.

Ist die A_n eine E_n, so kann man z. B. n^ν konstant, aber übrigens beliebig wählen. Auch dann läßt sich dazu t_λ so wählen, daß (14) und (41) erfüllt sind.

Es soll jetzt gerade der Fall untersucht werden, daß die A_n weder eine V_n noch eine E_n ist, die Übertragung aber inhaltstreu ist.

Dazu beweisen wir zunächst den Satz:

Zu einer X_{n-1} in einer X_n mit inhaltstreuer Übertragung IIc *läßt sich in jedem Punkte, wo $h_{\lambda\mu}$ den Rang $n-1$ hat, eine pseudonormale Richtung und eine Normierung von t_λ und n^ν angeben, so daß den beiden Gleichungen* (14) *und* (41) *genügt werden kann, vorausgesetzt, daß in dem betreffenden Punkte $B^{\alpha\beta\gamma}_{\omega\mu\dot\lambda} R_{\alpha\beta\dot\lambda}{}^{\dot\nu} t_\nu = 0$ ist.*

Wird in der X_{n-1} irgendein Tensor $(n-1)$-ten Ranges $g_{\lambda\mu}$ als Fundamentaltensor eingeführt, so ist die zu $g_{\lambda\mu}$ gehörige Übertragung in der X_{n-1}, wenn wir vorübergehend die Urvariablen so wählen, daß x^{a_n} über X_{n-1} konstant ist, gegeben durch die Gleichungen

$$(68) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad V^0_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda \left\{ {\lambda\,\mu \atop \nu} \right\}, \\ &\text{b)} \quad V^0_\mu w_\lambda = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x^\mu} - w_\nu \left\{ {\lambda\,\mu \atop \nu} \right\}, \end{aligned} \qquad \lambda, \mu, \nu = a_1, \ldots, a_{n-1},$$

für die ganz in X_{n-1} liegenden Felder v^ν und w_λ, während die Bestimmungszahlen mit einem ko- bzw. kontravarianten Index a_n unbestimmt bzw. Null sind. Ist nun für beliebige Wahl der Urvariablen

$$g_{\lambda\mu} = a_\lambda a_\mu, \qquad g^{\lambda\alpha} a_\alpha = a^\lambda, \tag{69}$$

so ist

$$g^{\lambda\mu} = a^\lambda a^\mu \tag{70}$$

und

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = a^\lambda a_\nu = B^\lambda_\nu. \tag{71}$$

Obwohl $B^*_\nu B^\lambda = a_\nu a^\lambda$, ist keineswegs $B^*_\nu = a_\nu$, $B^\lambda = a^\lambda$, da für die B die Gleichungen (21) gelten, für die a aber nicht. Nun ist:

$$(\nabla^0_\mu v^\lambda a_\lambda) a^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + a^\nu \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu} v^\lambda. \tag{72}$$

Gibt man also den n^3 Symbolen $a^\nu \dfrac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu}$ durch die auf die obenerwähnte besondere Wahl der Urvariablen bezüglichen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad a^\nu \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu} = \left\{ {\lambda\,\mu \atop \nu} \right\}, \\ &\text{b)}\quad a^{a_n} \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu} = 0, \\ &\text{c)}\quad a^\nu \frac{\partial a_{a_n}}{\partial x^\mu} = \text{unbestimmt}, \\ &\text{d)}\quad a^\nu \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^{a_n}} = \text{unbestimmt} \end{aligned}\right\} \lambda, \mu, \nu = a_1, \ldots, a_{n-1} \tag{73}$$

reale Bedeutung, so ist für beliebige Wahl der Urvariablen:

$$\text{a)}\quad \nabla^0_\mu v^\nu = (\nabla^0_\mu v^\lambda a_\lambda) a^\nu, \tag{74}$$
$$\text{b)}\quad \nabla^0_\mu w_\lambda = (\nabla^0_\mu w_\nu a^\nu) a_\lambda.$$

Für jeden Skalar p gilt:

$$\nabla^0_\mu p = \nabla'_\mu p = B^\alpha_\mu \nabla_\alpha p, \tag{75}$$

und es gilt also für jedes ganz in X_{n-1} liegende Feld v^ν:

$$\begin{aligned} \nabla^0_\mu v^\nu &= B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha v^\lambda a_\lambda) a^\nu \\ &= B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu - v^\lambda B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha a^\nu) a_\lambda, \end{aligned} \tag{76}$$

oder:

$$\boxed{B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu = \nabla^0_\mu v^\nu + v^\lambda B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha a^\nu) a_\lambda}. \tag{77}$$

Es verdient Beachtung, daß die Gleichungen (68) *bis* (77) *alle unabhängig sind von der Wahl einer pseudonormalen Richtung.* Insbesondere ist also der Affinor $B^\alpha_\mu(\nabla_\alpha a^\nu)a_\lambda$ von dieser Wahl unabhängig.

Wir wählen jetzt die pseudonormale Richtung und die Normierung von t_λ und n^ν so, daß (14) und (41) gelten. Da jetzt auch a_λ mit ∇ differenziert werden darf, läßt sich (77) umformen in:

$$B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu = \nabla^0_\mu v^\nu - v^\lambda B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha a_\lambda) a^\nu + v^\lambda B^\alpha_\mu \nabla_\alpha B^\nu_\lambda , \tag{78}$$

oder infolge (15) und (30):

$$\boxed{B^\alpha_\mu \nabla_\alpha v^\nu = \nabla^0_\mu v^\nu + v^\lambda T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} - v^\lambda h_{\mu\lambda} n^\nu}, \tag{79}$$

wo $T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ abkürzend gesetzt ist für

$$T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = - B^{\alpha\beta}_{\mu\lambda}(\nabla_\alpha a_\beta) a^\nu . \tag{80}$$

Vergleicht man (79) mit (27a), so folgt:

$$\boxed{\nabla'_\mu v^\nu = \nabla^0_\mu v^\nu + v^\lambda T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}} \tag{81a}$$

und in derselben Weise beweist man

$$\nabla'_\mu v_\lambda = \nabla^0_\mu v_\lambda - v_\nu T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} . \tag{81b}$$

Aus (81) folgt, daß der ganz in X_{n-1} liegende Affinor $T^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ als Differenz des Parameters $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ der Übertragung IIc in X_{n-1} und $\left\{ {\mu\ \lambda \atop \nu} \right\}$ in λ und μ symmetrisch ist.

Die ∇^0-Ableitung von $g_{\lambda\nu}$ ist, wie immer, Null. Die ∇'-Ableitung von $g_{\lambda\nu}$, für welche wir $- Q_{\mu\lambda\nu}$ schreiben (Ü. S. 68), ist nach (81b):

$$- Q_{\mu\lambda\nu} = \nabla'_\mu g_{\lambda\nu} = \nabla^0_\mu g_{\lambda\nu} - g_{\alpha\nu} T^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\lambda\alpha} T^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\nu} , \tag{82}$$

woraus folgt

$$T^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\lambda} g_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(Q_{\mu\lambda\nu} + Q_{\lambda\mu\nu} - Q_{\nu\mu\lambda}) .^{23}) \tag{83}$$

Jetzt schreiten wir zu einer näheren Bestimmung der Wahl der pseudonormalen Richtung. Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß der aus dem Affinor $B^\alpha_\mu(\nabla_\alpha a^\nu)a_\lambda$ aus (77) gebildete Vektor $g^{\alpha\lambda} a_\lambda \nabla_\alpha a^\nu$ stets außerhalb X_{n-1} liegt und nie Null ist, wenn man für $g_{\lambda\mu}$ den Tensor $h_{\lambda\mu}$ wählt, der nach Voraussetzung ein Tensor der X_{n-1} $(n-1)$-ten Ranges ist. Es ist dabei die Größe von t_λ irgendwie fest zu wählen. Die Überschiebung mit t_ν ist nämlich, da t_ν ein kovarianter Vektor der X_n ist und daher mit ∇ differenziert werden darf:

$$g^{\alpha\lambda} a_\lambda (\nabla_\alpha a^\nu) t_\nu = - g^{\alpha\lambda} a_\lambda a^\nu \nabla_\alpha t_\nu = - g^{\alpha\lambda} g_{\alpha\lambda} = - (n-1). \tag{84}$$

---

23) Diese Gleichung folgt auch aus Ü. S. 72 Gleichung (75a).

Diese Überschiebung ist also niemals Null, q. e. d. Wählt man also

$$g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} \tag{85}$$

$$n^\nu = -\frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} a_\lambda \nabla_\alpha a^\nu \tag{86}$$

so ist damit eine pseudonormale Richtung festgelegt und es gilt (14). Ändert man die Größe von t_λ, so ändert sich $g_{\lambda\mu}$ proportional und es fragt sich, ob dadurch die pseudonormale Richtung oder nur die Größe von n^ν beeinflußt wird. Bei dieser Änderung, die eine konforme Transformation der X_{n-1} darstellt:

$$'t_\lambda = \sigma t_\lambda, \quad 'g_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}, \quad 'g^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sigma} g^{\lambda\mu} \tag{87}$$

ändert sich die ∇_0-Ableitung eines kontravarianten Vektors bekanntlich[24] folgendermaßen

$$'\nabla^0_\mu v^\nu = \nabla^0_\mu v^\nu - v^{[\alpha} s^{\nu]} g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} s_\alpha v^\alpha B^\nu_\mu, \tag{88}$$

wo

$$s_\alpha = \nabla^0_\alpha \log\sigma, \quad s^\beta = g^{\beta\alpha} s_\alpha. \tag{89}$$

Gleichung (77) lehrt also

$$v^\lambda B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha {}'a^\nu) {}'a_\lambda = v^\lambda B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha a^\nu) a_\lambda + v^{[\alpha} s^{\nu]} g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} s_\alpha v^\alpha B^\nu_\mu, \tag{90}$$

woraus folgt

$$'g^{\lambda\mu} {}'a_\lambda \nabla_\mu {}'a^\nu = \frac{1}{\sigma} g^{\lambda\mu} a_\lambda \nabla_\mu a^\nu + \frac{1}{\sigma} g^{\lambda[\mu} s^{\nu]} g_{\lambda\mu} - \frac{1}{2\sigma} s_\lambda g^{\lambda\mu} B^\nu_\mu, \tag{91}$$

oder

$$\begin{aligned} {}'n^\nu &= \frac{1}{\sigma} n^\nu - \frac{1}{2\sigma(n-1)} \{(n-1) s^\nu - s^\nu\} + \frac{1}{2\sigma(n-1)} s^\nu \\ &= \frac{1}{\sigma} n^\nu - \frac{n-3}{2\sigma(n-1)} s^\nu. \end{aligned} \tag{92}$$

Die pseudonormale Richtung, definiert durch (86), ist also nur für $n = 3$ bei beliebigen Änderungen der Größe von t_λ invariant.

Aus (86) läßt sich nun bei dieser speziellen Wahl der pseudonormalen Richtung eine merkwürdige Eigenschaft der Affinoren $T_{\lambda\mu}{}^\nu$ und $Q_{\lambda\mu\nu}$ ableiten. (86) läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} n^\nu &= -\frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha B^\nu_\lambda + \frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} a^\nu \nabla_\alpha a_\lambda \\ &= \frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} (\nabla_\alpha t_\lambda) n^\nu + \frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} T_{\alpha\lambda}{}^\nu \\ &= n^\nu + \frac{1}{n-1} g^{\alpha\lambda} T_{\alpha\lambda}{}^\nu, \end{aligned}$$

[24] Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten auf eine R_n, Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 58—88, S. 78 Gleichung (127).

woraus folgt:

$$\boxed{g^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0}. \tag{94}$$

Aus (83) folgt dann:

$$g^{\lambda\mu}(Q_{\mu\lambda\nu} + Q_{\lambda\mu\nu} - Q_{\nu\mu\lambda}) = 0 \tag{95}$$

oder, da $Q_{\mu\lambda\nu}$ in den beiden letzten Faktoren symmetrisch ist:

$$g^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu\nu} = 2 g^{\lambda\mu} Q_{(\nu\mu]\lambda} = 2 g^{\lambda\mu} V'_{[\nu} g_{\mu]\lambda}, \tag{96}$$

welche Gleichung aber unter Berücksichtigung von (51a) übergeht in:

$$g^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu\nu} = g^{\lambda\mu} B_{\nu\mu\lambda}^{\beta\alpha\gamma} R_{\beta\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\nu} t_\nu. \tag{97}$$

Nach Voraussetzung ist aber die rechte Seite Null, sodaß resultiert:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \boxed{g^{\lambda\mu} V'_\lambda g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu\nu} = 0} \\ &\text{b)} \quad \boxed{g^{\lambda\mu} V'_\nu g_{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu} Q_{\nu\lambda\mu} = 0} \end{aligned}, \tag{98}$$

oder in anderer Form:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \boxed{V'_\mu g^{\mu\lambda} = 0} \\ &\text{b)} \quad \boxed{g_{\lambda\nu} V'_\mu g^{\lambda\nu} = 0} \end{aligned}. \tag{99}$$

Es ist zu beachten, daß bei der Ableitung von (98) von (51a), also von der Gültigkeit von (41) Gebrauch gemacht ist. Es muß also jetzt noch gezeigt werden, daß in der Tat bei der durch (86) bestimmten Wahl von n^ν, t_λ stets so normiert werden kann, daß (41) gilt.

Zuerst fragen wir aber noch nach der Bedeutung der Gleichung

$$B_{\omega\mu\lambda}^{\beta\alpha\gamma} R_{\beta\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\nu} t_\nu = 0, \tag{100}$$

wenn diese Gleichung nicht nur für eine einzige X_{n-1} in A_n, sondern für jede beliebige X_{n-1} gelten soll. (100) ist dann gleichbedeutend mit

$$u^\omega v^\mu w^\lambda R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} t_\nu = 0, \tag{101}$$

gültig für jede Wahl von t_ν und für alle Vektoren u^ω, v^μ, w^λ, die in der $(n-1)$-Richtung von t_ν liegen. (101) bringt zum Ausdruck, daß alle Bestimmungszahlen $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ verschwinden, bei denen $\nu \neq \omega$, $\nu \neq \mu$, $\nu \neq \lambda$, und zwar für *jedes* beliebige Koordinatensystem. Man kann beweisen, daß dies die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß in der A_n, in jeder Lage und jeder Richtung geodätische X_{n-1} existieren, das sind X_{n-1}, deren tangierender Vektor durch quasiparallele Bewegung in A_n im Sinne der Übertragung IIc der A_n stets in sich selbst übergeht. Soll es eine einzige X_{n-1} dieser Art geben, so muß offenbar $h_{\lambda\mu} = 0$, also

$$B_\mu^\alpha V_\alpha t_\lambda = p_\mu t_\lambda \tag{102}$$

sein, wo p_μ irgendein Vektor in der X_{n-1} ist. Es muß also

$$V_\mu t_\lambda = p_\mu t_\lambda + t_\mu q_\lambda \tag{103}$$

sein, wo q_λ irgendein beliebiger Vektor ist. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichung lauten

$$B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} R_{\alpha\beta\lambda}^{\quad\cdot\cdot\nu} t_\nu = 2 B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} (V_{[\alpha} p_{\beta]} t_\lambda + V_{[\alpha} t_{\beta]} q_\lambda), \tag{104}$$

oder, da $B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} V_\alpha t_\beta$ symmetrisch ist:

$$B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} R_{\alpha\beta\lambda}^{\quad\cdot\cdot\nu} t_\nu = 2 B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} \{V_{[\alpha} p_{\beta]} t_\lambda + p_{[\alpha} p_{\beta]} t_\lambda\} = 2 B^{\alpha\beta}_{\omega\mu} (V_{[\alpha} p_{\beta]}) t_\lambda. \tag{105}$$

Damit also X_{n-1} dieser Art in jeder Richtung und jeder Lage möglich sind, ist notwendig und hinreichend, daß $u^\omega v^\mu R_{\omega\mu\lambda}^{\quad\cdot\cdot\nu} t_\nu$ für jede Wahl von u^ω und v^μ in der $(n-1)$-Richtung von t_λ die $(n-1)$-Richtung von t_λ hat, d. h. es muß (101) gelten.

Ist $f^{\omega\mu} d\sigma$ irgendein Flächenelement in der $(n-1)$-Richtung von t_λ, und wird der Wert von t_λ in einem Punkt P des Randes von $f^{\omega\mu} d\sigma$ dem Rande entlang quasiparallel im Sinne der Übertragung IIc bewegt, so ist die Differenz Dt_λ zwischen Anfangswert und Endwert in P:

$$Dt_\lambda = f^{\omega\mu} d\sigma R_{\omega\mu\lambda}^{\quad\cdot\cdot\nu} t_\nu. \tag{106}$$

(101) besagt also, daß Dt_λ die Richtung von t_λ hat.

Zwei geodätische X_{n-1} schneiden sich in einer geodätischen X_{n-2}, und allgemeiner ist der Schnitt einer geodätischen X_p mit einer geodätischen X_q wieder geodätisch. Eine A_n, deren Übertragung der Gleichung (101) genügt, enthält also auch geodätische X_p in jeder Lage und jeder Richtung, $p = 1, \ldots, n-1$. Jede geodätische X_p, die ein p-dimensionales Element mit einer geodätischen X_q gemeinsam hat, $p \leqq q$, liegt ganz in dieser X_q. Die geodätischen X_p verhalten sich also genau wie die Geraden, Ebenen usw. einer projektiven Mannigfaltigkeit. Wir nennen daher eine Übertragung mit diesen Eigenschaften *projektiveuklidisch*[25]. Aus dem auf S. 173 ausgesprochenen Satz folgt dann der Satz:

In einer X_n mit inhaltstreuer und projektiveuklidischer Übertragung IIc *läßt sich in jedem Punkte einer beliebigen X_{n-1}, wo $h_{\lambda\mu}$ den Rang $n-1$ hat, eine pseudonormale Richtung und eine Normierung von t_λ und n^ν angeben, so daß den Gleichungen* (14) *und* (41) *beiden genügt werden kann.*

Aus (34) folgt noch, daß in einer A_n mit projektiveuklidischer Übertragung die in einer geodätischen X_{n-1} induzierte Übertragung stets, unabhängig von der Wahl der pseudonormalen Richtung, projektiveuklidisch ist.

[25]) Es kann bewiesen werden, daß jede projektiveuklidische Übertragung durch eine Änderung, bei der die geodätischen Linien geodätisch bleiben, in eine euklidisch-affine, d. h. eine Übertragung mit $R_{\omega\mu\lambda}^{\quad\cdot\cdot\nu} = 0$, übergeführt werden kann.

§ 8.

Festlegung des Pseudonormalvektors.

Der im vorigen Paragraphen angefangene Beweis soll jetzt zu Ende geführt werden, indem gezeigt wird, daß bei der durch (86) bestimmten Wahl der pseudonormalen Richtung die Größe von t_λ stets so gewählt werden kann, daß sowohl (14) als (41) gelten. Ausgangspunkt ist die im vorigen Paragraphen noch nicht verwendete Inhaltstreue der Übertragung der A_n.

Ist $I_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ ein in W_n konstanter n-Vektor, so ist jedenfalls

$$t_{\lambda_1} t_{\nu_1} = \lambda I_{\lambda_1 \dots \lambda_n} I_{\nu_1 \dots \nu_n} g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n}, \tag{107}$$

und es gilt λ zu bestimmen. (41) ist äquivalent mit:

$$B^a_\mu (\nabla_a t_\lambda t_\nu) n^\lambda n^\nu = 0, \tag{108}$$

oder, da $I_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ konstant ist, auch mit:

$$n^{\lambda_1} n^{\nu_1} I_{\lambda_1 \dots \lambda_n} I_{\nu_1 \dots \nu_n} B^a_\mu \nabla_a \lambda g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n} = 0. \tag{109}$$

Nun ist $n^{\lambda_1} n^{\nu_1} I_{\lambda_1 \dots \lambda_n} I_{\nu_1 \dots \nu_n}$ bis auf einen Zahlenfaktor gleich $g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n]}$, wo [[ ]] bedeutet, daß über λ und über ν unabhängig voneinander zu alternieren ist. (109) ist also gleichbedeutend mit

$$(\nabla'_\mu \lambda g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n}) g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n]}, \tag{110}$$

oder auch mit

$$\begin{aligned} &(\nabla'_\mu \lambda) g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n} g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n] } \\ &+ (n-1) \lambda (\nabla'_\mu g^{\lambda_2 \nu_2}) g^{\lambda_3 \nu_3} \dots g^{\lambda_n \nu_n} g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n]}, \end{aligned} \tag{111}$$

da die Verknüpfung [[ ]] der $g_{\lambda\nu}$ eine kommutative ist. Nun gelten aber die leicht verifizierbaren Identitäten:

$$g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n} g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n]} = 1 \tag{112}$$

und

$$(n-1) g^{\lambda_3 \nu_3} \dots g^{\lambda_n \nu_n} g_{[\lambda_2 [\nu_2} \dots g_{\lambda_n] \nu_n]} = g_{\lambda_2 \nu_2}, \tag{113}$$

so daß (111) gleichbedeutend ist mit

$$\nabla'_\mu \lambda + \lambda (\nabla'_\mu g^{\lambda \nu}) g_{\lambda \nu}, \tag{114}$$

oder infolge (99 b) mit

$$\nabla'_\mu \lambda = 0. \tag{115}$$

λ ist also eine Konstante, die beliebig gewählt werden darf. Wählt man $\lambda = (n-1)!$, so geht (107) über in

$$t_{\lambda_1} t_{\nu_1} = (n-1)!\, I_{\lambda_1 \dots \lambda_n} I_{\nu_1 \dots \nu_n} g^{\lambda_2 \nu_2} \dots g^{\lambda_n \nu_n}, \tag{116}$$

oder in anderer Form

$$t_{[\lambda_1[\nu_1} g_{\lambda_2\nu_2} \dots g_{\lambda_n]\nu_n] } = I_{\lambda_1\dots\lambda_n} I_{\nu_1\dots\nu_n}, \tag{117}$$

und diese Gleichungen sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß (41) erfüllt ist.

Da offenbar die Größe von t_λ stets so gewählt werden kann, daß bei gegebenem konstanten n-Vektor $I_{\lambda_1\dots\lambda_n}$ (116) gilt, ist damit der auf S. 173 und 178 ausgesprochene Satz bewiesen. Nach dem auf S. 170 bewiesenen Satz ist die durch (86) festgelegte pseudonormale Richtung die einzige, die bei der Normierung von t_λ nach (116) Erfüllung von (14) und (41) ermöglicht[26]).

§ 9.

Krümmungstheorie.

Es sollen nur einige Hauptgleichungen aufgestellt werden. Durch den Tensor $h_{\lambda\mu}$ sind, unabhängig von der Wahl der pseudonormalen Richtung, die *Asymptotenrichtungen* gegeben. Es sind die Nullrichtungen von $h_{\lambda\mu}$. Für einen Vektor v^ν in einer Nullrichtung gilt:

$$v^\lambda v^\mu h_{\lambda\mu} = 0, \tag{118}$$

in Worten:

Beim Fortschreiten entlang einer Asymptotenrichtung dreht sich die tangierende E_{n-1} um diese Richtung.

Der Affinor $l_\mu^{\ \nu}$ bestimmt die Hauptkrümmungsgebiete. Es sind die Hauptgebiete von $l_\mu^{\ \nu}$. Für einen Vektor w^μ in einem Hauptgebiete gilt

$$w^\mu l_\mu^{\ \nu} = \frac{1}{\varrho} w^\nu. \tag{119}$$

Die Diskriminante der Gleichung (119) gibt eine Gleichung $(n-1)$-ten Grades in $\frac{1}{\varrho}$. Die $n-1$ Wurzeln, von denen einige Null sein können, sind die *Hauptkrümmungen* $\frac{1}{\varrho_1}, \dots, \frac{1}{\varrho_{n-1}}$ der A_{n-1}. Zu jeder p-fachen Wurzel gehört ein p-dimensionales Hauptkrümmungsgebiet, zu den Wurzeln Null das Nullgebiet. Die Summe der Hauptkrümmungen ist die Invariante

$$\frac{1}{\varrho_1} + \dots + \frac{1}{\varrho_n} = l_\mu^{\ \mu}. \tag{120}$$

Das Produkt der Hauptkrümmungen ist gleich der Determinante von $l_\mu^{\ \nu}$.

Ist die pseudonormale Richtung noch ganz beliebig gewählt, so gilt

[26]) Ist die Übertragung der A_n nicht projektiveuklidisch, so bleibt der im § 7 formulierte Satz gelten, es tritt nur in (86) ein $R_{\omega\mu\lambda}^{\ \ \ \ \ \nu}$ enthaltendes Zusatzglied auf.

schon (34) und $R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ ist die Krümmungsgröße der A_{n-1}. Durch Überschiebung in sich selbst nach ω, ν entsteht:

$$B^{\alpha\delta}_{\mu\lambda} R_{\alpha\delta} = R'_{\mu\lambda} + l^{\cdot\nu}_{\nu} h_{\mu\lambda} - l^{\cdot\nu}_{\mu} h_{\nu\lambda}. \tag{121}$$

Wird nun $h_{\lambda\mu}$ als Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$ eingeführt, so geht diese Gleichung bei Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$ über in

$$R_{\mu\lambda} g^{\lambda\mu} = R' + (n-2) l^{\cdot\nu}_{\nu}. \tag{122}$$

Aus (121) folgt ferner bei Überschiebung von $g^{\lambda\varkappa}$:

$$B^{\alpha}_{\mu} R_{\alpha\lambda} g^{\lambda\varkappa} = R'^{\cdot\varkappa}_{\mu} + l^{\cdot\nu}_{\nu} B^{\varkappa}_{\mu} - l^{\cdot\varkappa}_{\mu}, \tag{123}$$

woraus unter Berücksichtigung von (122) folgt:

$$l^{\cdot\varkappa}_{\mu} = R'^{\cdot\varkappa}_{\mu} - B^{\alpha}_{\mu} R_{\alpha\lambda} g^{\lambda\varkappa} - \frac{1}{n-2}(R' - R_{\alpha\lambda} g^{\alpha\lambda}) B^{\varkappa}_{\mu}. \tag{124}$$

Neben $R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ existiert nun in A_{n-1} noch die zu $g_{\lambda\mu}$ gehörige Krümmungsgröße $K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$. Die Beziehungen zwischen diesen beiden Größen und $T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ ergeben sich durch Differentiation von (81a). Es entsteht die Gleichung

$$R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - \nabla'_{\omega} T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + \nabla'_{\mu} T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega} - T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\omega} T^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\mu} + T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} T^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\omega}.^{27}) \tag{125}$$

Für den Fall, daß die A_n eine E_n ist, und also $Q_{\mu\lambda\nu}$ infolge (52a) symmetrisch wird, geht diese Gleichung nach einiger Umrechnung über in:

$$R'_{\omega\mu[\lambda\alpha]} g^{\alpha\nu} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - T^{\cdot\cdot\alpha}_{\lambda\mu} T^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\omega} + T^{\cdot\cdot\alpha}_{\lambda\omega} T^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\mu}, \tag{126}$$

woraus bei Überschiebung in sich selbst nach ω, ν entsteht

$$R'_{\beta\mu[\lambda\alpha]} g^{\alpha\beta} = K'_{\mu\lambda} + T^{\beta\alpha}_{\lambda} T_{\mu\alpha\beta}. \tag{127}$$

Bei Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$ entsteht

$$R' = K' + T^{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma}, \tag{128}$$

oder, infolge (122), da $R_{\mu\lambda} = 0$:

$$K' = -(n-2) l^{\cdot\nu}_{\nu} + T^{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma}. \tag{129}$$

Die Gleichung (124) geht in diesem einfachen Falle über in:

$$l^{\cdot\varkappa}_{\mu} = R'^{\cdot\varkappa}_{\mu} - \frac{1}{n-2}(K' + T^{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma}) B^{\varkappa}_{\mu}. \tag{130}$$

$\frac{1}{n-1} l^{\cdot\nu}_{\nu}$ ist die „mittlere Affinkrümmung", $\varrho_1 \dots \varrho_n$ sind die „affinen Hauptkrümmungsradien[28])".

---

[27]) Dies ist die Gleichung (107) Ü. S. 77.

[28]) Berwald, l. c. [9]), S. 105. K' und $T^{\alpha\beta\gamma} T_{\alpha\beta\gamma}$ sind für $A_n = E_n$ identisch mit R bzw. $-I$ bei Berwald.

Für eine beliebige A_n folgt aus (34) und (125):

$$(131)\quad B^{\beta\alpha\nu\delta}_{\omega\mu\gamma\lambda} R^{\cdot\cdot\cdot\gamma}_{\beta\alpha\delta} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - V'_\omega T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + V'_\mu T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega} - T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\omega} T^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\mu} + \\ + T^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} T^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\omega} + 2 l^{\cdot\nu}_{[\omega} h_{\mu]\lambda}.$$

Für den speziellen Fall, daß A_n eine E_n ist und gleichzeitig $T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} = 0$, folgt aus (34), (125) und (131):

$$(132)\quad R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = -2 l^{\cdot\nu}_{[\omega} g_{\mu]\lambda},$$

woraus bei Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$ hervorgeht:

$$(133)\quad R'^{\cdot\nu}_{\omega} = K'^{\cdot\nu}_{\omega} = -(n-2) l^{\cdot\nu}_{\omega}.$$

Infolge (130) ist also

$$(134)\quad (n-1) l^{\cdot\nu}_{\omega} = -\frac{1}{n-2} K' B^{\nu}_{\omega}$$

und $R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ hat also die Form:

$$(135)\quad R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} K' B^{\nu}_{[\omega} g_{\mu]\lambda}.$$

Aus (135) folgt ferner

$$(136)\quad V' K' = V^0 K' = 0.$$

Sämtliche Hauptkrümmungen sind also in diesem speziellen Falle gleich und konstant über A_{n-1}.

§ 10.

Die Beziehungen zur Berwaldschen Geometrie, zur Affingeometrie und zur gewöhnlichen Differentialgeometrie.

Die Berwaldsche Geometrie entsteht, wenn $A_n = E_n$ und pseudonormale Richtung und Normierung von t_λ und n^ν irgendwie so gewählt werden, daß (14) und (41) gelten. Die Größen $g_{\lambda\mu}$, $h_{\lambda\mu}$, $l^{\cdot\nu}_{\mu}$, $T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ und $l^{\cdot\alpha}_{\mu} h_{\alpha\nu}$ sind dann identisch mit den Größen $g_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $\alpha_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu}$, $\alpha_{\lambda\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$ und $b^*_{\mu\nu}$ bei Berwald.

Die n-dimensionale Affingeometrie entsteht, wenn $A_n = E_n$, $g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu}$ und wenn ferner t_λ nach (117) normiert und für n^ν der Wert aus (86) gewählt wird. $g_{\lambda\mu}$ korrespondiert mit der ersten, $T^{\cdot\cdot\alpha}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu}$ mit der zweiten Grundform.

Die Entstehung der Differentialgeometrie der V_{n-1} in V_n wurde schon auf S. 173 angegeben.

Delft, April 1922.

(Eingegangen am 3. Mai 1922.)

Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen.

Von

J. A. Schouten in Delft.

II. Die X_m in A_n.[1])

§ 1.

Die Größen der X_n und der X_m.

Liegt eine X_m in X_n, so kann man bei einem kontravarianten Vektor in einem Punkte P der X_m erst dann von einer X_m-Komponente sprechen, wenn eine außerhalb der X_m liegende p-Richtung, $p = n - m$, als pseudonormal eingeführt ist. Unter den kovarianten Größen der X_n ist eine, der X_m tangierende p-Vektor, $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$, bis auf einen Zahlenfaktor ausgezeichnet. Jeder kovariante Vektor u_λ der X_n, dessen $(n-1)$-Richtung nicht die m-Richtung von $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ enthält, bestimmt stets (durch Schnitt) eindeutig einen kovarianten Vektor w'_λ der X_m, darstellbar durch eine Doppel-E_{m-1} (mit einem Sinn). Umgekehrt bestimmt w'_λ erst dann eindeutig einen kovarianten Vektor w_λ der X_n, wenn eine pseudonormale p-Richtung gegeben ist. w_λ und w'_λ können dann identifiziert werden und w_λ heißt die X_m-Komponente von u_λ. Ist B^{λ}_{ν} der Einheitsaffinor der X_m, so ist stets

(1) *(13)*[2]) $$B^{\lambda}_{\nu} u_\lambda = w'_\nu.$$

---

[1]) Der erste Teil dieser Arbeit ist auf S. 161–182 dieses Heftes erschienen; er wird hier zitiert als I.

[2]) Die kursiv gedruckten Zahlen geben die korrespondierende Gleichung aus dem ersten Teile dieser Arbeit für $m = n - 1$ an.

Wird eine pseudonormale p-Richtung gegeben durch den einfachen p-Vektor $n^{\nu_1 \cdots \nu_p}$, und normiert man so, daß

(2) (14) $$p!\, t_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} n^{\lambda_p \cdots \lambda_1} = 1,$$

so kann man setzen

(3) (15) $$B_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - C_\lambda^\nu; \qquad C_\lambda^\nu = p\,p!\, t_{\lambda a_2 \ldots a_p} n^{a_p \cdots a_2 \nu}$$

und es wird dann $B_\nu^\lambda u_\lambda$ bzw. $B_\nu^\lambda v^\nu$ die X_m-Komponente von u_λ bzw. v^ν. Ähnliches gilt, wie in I, für Größen höheren Grades.

§ 2.

Die in X_m induzierte Übertragung. Beweis, daß $X_m = A_m$.

Wählt man für die idealen Faktoren von B_λ^ν

(4) (21) $$\begin{aligned} B_\lambda^* &= A_\lambda^* - A_a^* C_\lambda^a \\ B^\nu &= A^\nu - A^a C_a^\nu \end{aligned}$$

und definiert man die Übertragung der X_n durch die Gleichungen (I, 2, 3), so daß $X_n = A_n$, und die der X_m durch (I, 22, 23), so beweist man wie in I, daß auch (I, 24) und (I, 25) gelten. Die X_m ist also mit dieser Übertragung eine A_m.

Für ein ganz in der A_m liegendes Feld v^ν bzw. w_λ gelten die Gleichungen (I, 26), oder infolge (I, 11) und (3):

(5) (27)
$$\text{a)}\quad B_\mu^a \nabla_a v^\nu = \nabla'_\mu v^\nu - p\,p!\, v^\beta B_\mu^a (\nabla_a t_{\beta \gamma_2 \ldots \gamma_p}) n^{\gamma_p \cdots \gamma_2 \nu}$$
$$\text{b)}\quad B_\mu^a \nabla_a w_\lambda = \nabla'_\mu w_\lambda - p\,p!\, w_\beta B_\mu^a (\nabla_a n^{\gamma_p \cdots \gamma_2 \beta}) t_{\lambda \gamma_2 \ldots \gamma_p}.$$

Wird $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ in p reelle Faktoren zerlegt: $\overset{1}{t}_{[\lambda_1} \ldots \overset{p}{t}_{\lambda_p]}$, so gilt (I, 28) für jeden Vektor $\overset{u}{t}_\lambda$, $u = 1, \ldots, p$ und infolgedessen ist

(6) (28) $$B^{a\beta}_{[\mu\lambda]} \nabla_a t_{\beta \lambda_2 \ldots \lambda_p} = 0.$$

Aus (3) folgt dann aber, daß (I, 29) gilt, d. h. daß $B_{\mu\lambda}^{a\beta} \nabla_a B_\beta^\nu$ in μ und λ symmetrisch ist. An Stelle der Größen $h_{\lambda\mu}$ und l_μ^ν (I, 30, 31) treten die nur in den ersten beiden Faktoren ganz in A_m liegenden Größen

(7) (30) $$H_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = H_{\mu\lambda}^{\ \ \nu} = p!\, B_{\mu\lambda}^{a\beta} (\nabla_a t_{\beta \gamma_2 \ldots \gamma_p}) n^{\gamma_p \cdots \gamma_2 \nu}$$

$$= \sum_u B_{\mu\lambda}^{a\beta} (\nabla_a \overset{u}{t}_\beta) \overset{u}{n}^\nu = \sum_u \overset{u}{h}_{\mu\lambda} \overset{u}{n}^\nu$$

und

(8) (31) $$L_{\mu\,\cdot\,\lambda}^{\cdot\,\nu} = p!\, B_{\mu\,\beta}^{\alpha\nu}\,(\nabla_\alpha n^{\gamma_p\cdots\gamma_2\beta})\,t_{\lambda\gamma_2\ldots\gamma_p}$$
$$= \sum_u B_{\mu\,\beta}^{\alpha\nu}(\nabla_\alpha \overset{u}{n}{}^{\beta})\,\overset{u}{t}_\lambda = \sum_u \overset{u}{l}{}_{\mu}^{\cdot\,\nu}\,\overset{u}{t}_\beta,$$

wo die $\overset{u}{n}{}^{\nu}$ so gewählt sind, daß

(2a) (14) $$\overset{u}{t}_\lambda\,\overset{v}{n}{}^{\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } u \neq v, \\ 1 & \text{„ } u = v. \end{cases}$$

§ 3.

Die Gleichungen von Gauß und Codazzi.

Durch nochmalige Differentiation von (5a) ergibt sich

(9) (34) $$B_{\omega\mu\gamma\lambda}^{\beta\alpha\nu\delta} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} + 2pp!\, B_{[\omega\mu]\gamma\lambda}^{\beta\alpha\nu\delta}\,(\nabla_\alpha t_{\delta\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p})\cdot(\nabla_\beta n^{\varepsilon_p\cdots\varepsilon_2\gamma}),$$

wo $R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ die Krümmungsgröße der A_m ist. Da aber

(10) $$pp!\, B_{\omega\mu\gamma\lambda}^{\beta\alpha\nu\delta}\,(\nabla_\alpha t_{\delta\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p})(\nabla_\beta n^{\varepsilon_p\cdots\varepsilon_2\gamma}) = H_{\lambda[\mu}^{\cdot\,\gamma}\,L_{\omega]\,\cdot\,\gamma}^{\cdot\,\nu},$$

folgt:

(11) (34) $$B_{\omega\mu\gamma\lambda}^{\beta\alpha\nu\delta} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} + 2\,H_{\lambda[\mu}^{\cdot\,\gamma}\,L_{\omega]\,\cdot\,\gamma}^{\cdot\,\nu},$$

die für A_m und A_n verallgemeinerten Gaußschen Gleichungen. Wie in I folgen die verallgemeinerten Gleichungen von Codazzi:

(12a) (37) $$B_{\omega\mu\lambda}^{\beta\alpha\delta} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\,\overset{u}{t}_\gamma = 2\nabla'_{[\omega}\,\overset{u}{h}_{\mu]\lambda} - 2\sum_v B_{[\mu}^{\alpha}\,\overset{v}{h}_{\omega]\lambda}\,(\nabla_\alpha \overset{u}{t}_\gamma)\,\overset{v}{n}{}^{\gamma},$$

(12b) (38) $$B_{\omega\mu\gamma}^{\beta\alpha\nu} R_{\beta\alpha\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\,\overset{u}{n}{}^{\delta} = -2\nabla'_{[\omega}\,\overset{u}{l}{}_{\mu]}^{\cdot\,\nu} + 2\sum_v B_{[\mu}^{\alpha}\,\overset{v}{l}{}_{\omega]}^{\cdot\,\nu}\,(\nabla_\alpha \overset{u}{n}{}^{\delta})\,\overset{v}{t}_\delta.$$

§ 4.

Einführung einer weiteren Bedingung für $t_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ und $n^{\nu_1\cdots\nu_p}$.

Statt (I, 41a) stellen wir jetzt die Forderung

(13a) (41a) $$B_\mu^\alpha(\nabla_\alpha \overset{u}{n}{}^{\lambda})\,\overset{u}{t}_\lambda = 0, \qquad u = 1, \ldots, p,$$

gleichbedeutend mit

(13b) (41b) $$B_\mu^\alpha(\nabla_\alpha \overset{u}{t}_\lambda)\,\overset{u}{n}{}^{\lambda} = 0, \qquad u = 1, \ldots, p.$$

(13a) besagt u. a., daß das Differential von $n^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ für jede in X_m gelegene Verrückung mit der $(n-p)$-Richtung von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ in einer E_x liegt, $x < n$. Wir beweisen nun die Sätze:

Existiert in X_m keine Richtung v^μ, so daß $B^\alpha_\lambda v^\mu \nabla_\mu \overset{u}{t}_\alpha = 0$ wäre, und existiert bei irgendeiner bis auf einen konstanten Faktor festen Wahl von $\overset{u}{t}_\lambda$, $u = 1, \dots, p$, eine pseudonormale p-Richtung, so daß (2a) *und* (13) *gelten, so ist diese p-Richtung bei dieser Wahl die einzig mögliche. Umgekehrt ist bei einer bestimmten pseudonormalen p-Richtung bis auf einen konstanten Faktor höchstens eine Normierung von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ möglich, so daß sowohl* (2) *als* (13) *gilt.*

Nehmen wir an, es seien bei einer bestimmten Wahl von $\overset{1}{t}_\lambda, \dots, \overset{p}{t}_\lambda$ zwei verschiedene p-Vektoren $n^{\nu_1 \dots \nu_p}$ und $N^{\nu_1 \dots \nu_p}$ möglich. Man kann dann diese beiden p-Vektoren in p reale Faktoren zerlegen:

$$n^{\nu_p \dots \nu_1} = \underset{p}{n}{}^{[\nu_p} \dots \underset{1}{n}{}^{\nu_1]}; \quad N^{\nu_p \dots \nu_1} = \underset{p}{N}{}^{[\nu_p} \dots \underset{1}{N}{}^{\nu_1]}; \quad t_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \overset{1}{t}_{[\lambda_1} \dots \overset{p}{t}_{\lambda_p]}.$$

Als Richtungen von $\underset{u}{n}{}^\nu$ und $\underset{u}{N}{}^\nu$ wählen wir dann die Schnitte von $n^{\nu_1 \dots \nu_p}$ bzw. $N^{\nu_1 \dots \nu_p}$ mit der gemeinschaftlichen $(n-p+1)$-Richtung der $(p-1)$-Faktoren von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ außer $\overset{u}{t}_\lambda$. In jedem Punkte der X_m wählen wir dazu die Normierung der $p-1$ ersten Faktoren $\overset{u}{t}_\lambda$, $\underset{u}{n}{}^\nu$ und $\underset{u}{N}{}^\nu$ so, daß

$$(15) \qquad \underset{x}{n}{}^\lambda \overset{y}{t}_\lambda = \underset{x}{N}{}^\lambda \overset{y}{t}_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y \\ 0 & \text{,, } x \neq y \end{cases}, \quad x, y = 1, \dots, p-1,$$

dann ist infolge (2) auch

$$(16) \qquad \underset{u}{n}{}^\lambda \overset{v}{t}_\lambda = \underset{u}{N}{}^\lambda \overset{v}{t}_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } u = v \\ 0 & \text{,, } u \neq v \end{cases}, \quad u, v = 1, \dots, p,$$

d. h. geometrisch, daß $\underset{u}{n}{}^\nu$ gerade zwischen den beiden E_{n-1} von $\overset{u}{t}_\lambda$ paßt und in den $(n-1)$-Richtungen der $p-1$ anderen Faktoren von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ liegt. Das gleiche gilt für $\underset{u}{N}{}^\nu$. Dann soll infolge (13a) gelten:

$$(17) \qquad B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha \underset{u}{n}{}^\lambda) \overset{u}{t}_\lambda = B^\alpha_\mu (\nabla_\alpha \underset{u}{N}{}^\lambda) \overset{u}{t}_\lambda = 0, \quad u = 1, \dots, p.$$

Für die p-Vektoren $\underset{u}{s}^{\nu} = \underset{n}{n}^{\nu} - \underset{u}{N}^{\nu}$ gilt nun infolge (16) und (17):

$$t_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \underset{u}{s}^{\lambda_1} = 0, \tag{18}$$

$$B_{\mu}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} \underset{u}{t}_{\lambda}) \underset{u}{s}^{\lambda} = 0. \tag{19}$$

(18) besagt, daß $\underset{u}{s}^{\nu}$ in der X_m liegt, und (19) ist infolge der Symmetriegleichung (I, 28) gleichbedeutend mit

$$B_{\mu}^{\lambda} \underset{u}{s}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} \underset{u}{t}_{\lambda}) = 0, \tag{20}$$

was den Voraussetzungen widerspricht. Sämtliche Vektoren $\underset{u}{s}^{\nu}$ müssen also Null sein, d. h. es ist $n^{\nu_1 \dots \nu_p} = N^{\nu_1 \dots \nu_p}$, q. e. d.

Der zweite Teil des Satzes wird bewiesen wie in I, § 5. (20) besagt, daß das Differential von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ bei einer Verrückung in der Richtung von $\underset{u}{s}^{\nu}$ bei Überschiebung mit jedem kontravarianten Vektor in X_m Null erzeugt und also ein p-Vektor mit der $(n-p)$-Richtung von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ ist. Daß diese Gleichung für keine Richtung von $\underset{u}{s}^{\nu}$ gelten soll, bedeutet also geometrisch, daß wir alle Punkte der X_m von der Betrachtung ausschließen, wo die tangierende E_m bei pseudoparalleler Verschiebung in irgendeiner Richtung stationär ist. (Bei einer X_1 in E_3 also z. B. die Wendepunkte.)

§ 5.

Die Inhaltstreue der induzierten Übertragung.

Wir beweisen den Satz:

Liegt eine X_m in einer X_n mit inhaltstreuer Übertragung IIc *und ist die pseudonormale p-Richtung in irgendeiner Weise so gewählt, daß den beiden Gleichungen* (2) *und* (13) *durch geeignete Normierung von $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ und $n^{\nu_1 \dots \nu_p}$ genügt werden kann, so ist die in der X_m vermittels* (4) *und* (I, 23) *induzierte Übertragung ebenfalls eine inhaltstreue Übertragung* IIc.

Es sei $I_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ ein in A_n konstanter n-Vektor und $I_{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ ein m-Vektor in X_m, so daß

$$I_{[\lambda_1 \dots \lambda_m} t_{\nu_1 \dots \nu_p]} = I_{\lambda_1 \dots \lambda_m} t_{\nu_1 \dots \nu_p}, \tag{21}$$

dann ist

$$(\nabla_{\mu} I_{[\lambda_1 \dots \lambda_m}) t_{\nu_1 \dots \nu_p]} + (\nabla_{\mu} t_{[\nu_1 \dots \nu_p}) I_{\lambda_1 \dots \lambda_m]} = 0. \tag{22}$$

Nun folgt aus (13b)

$$B_{\mu}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} t_{[\nu_1 \dots \nu_p}) I_{\lambda_1 \dots \lambda_m]} = 0, \tag{23}$$

so daß infolge (23)

$$B^a_\mu (\nabla_a J_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]}) t_{\nu_1 \dots \nu_p]} = 0, \tag{24}$$

also auch

$$(\nabla'_\mu J_{[\lambda_1 \dots \lambda_m]}) t_{\nu_1 \dots \nu_p]} = 0 \tag{25}$$

und infolgedessen

$$\nabla'_\mu J_{\lambda_1 \dots \lambda_m} = 0. \tag{26}$$

Die Übertragung der X_m ist also inhaltstreu.

Delft, Mai 1922.

(Eingegangen am 16. September 1922.)

Die Airysche Funktion für den Ellipsenring.

Von

A. Timpe in Berlin.

Vorbemerkung.

In der Elastizitätslehre bietet der Idealfall des „ebenen Problems" die Möglichkeit einer erheblichen Vereinfachung des mathematischen Ansatzes. Man kann nach G. B. Airy[1]) die drei in Frage kommenden Spannungskomponenten durch die Ableitung einer einzigen Funktion ψ, der Airyschen Spannungsfunktion, ausdrücken, die nach Maxwell[2]) der Differentialgleichung $\nabla\nabla\psi = 0$ genügt. Die Integration dieser Gleichung erfordert die Randwerte von ψ und $\frac{d\psi}{dn}$ (Ableitung nach der Randnormalen n), die sich aus den Randspannungen gewinnen lassen. Die Weiterbildung der anwendungsreichen Theorie verdankt man hauptsächlich J. H. Michell[3]) und andererseits F. Klein[4]). Das von letzterem untersuchte interessante Problem der Selbstspannungen in Kontinuen und Fachwerken habe ich auf Kleins Anregung, neben manchen anderen Beispielen, für den Fall des von konzentrischen Kreisen begrenzten Ringes behandelt[5]).

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit dem Spannungsproblem für das von konfokalen Ellipsen begrenzte Gebiet. Er nimmt den leitenden Gedanken der früheren Arbeit wieder auf: Licht zu verbreiten über die für technische Anwendungen bedeutungsvolle Frage der Verteilung der Spannungen in einem irgendwie belasteten geraden oder gekrümmten

---

[1]) Brit. Assoc. Report, Cambridge 1862, S. 82, und Philos. Transact. 1863, S. 49.

[2]) Scientific Papers, vol. II, S. 102.

[3]) Lond. Math. Soc. Proc. **31** (1899), S. 100; **32** (1900), S. 35; **34** (1901/02), S. 223.

[4]) F. Klein, und K. Wieghardt: Arch. Math. III. Reihe **8** (1904), S. 1 u. 95. Es wird nötig sein, den Kontakt mit den italienischen Autoren herzustellen, in deren Aufsätzen über „Distorsionen" auf Klein überhaupt nicht Bezug genommen wird.

[5]) Zeitschr. Math. Phys. **52** (1905), S. 348.

Stabe [6]). Dabei handelt es sich nunmehr um einen einfachen Typ eines Stabes mit *veränderlichem* Querschnitt, und die Anwendung auf Haken, Kettenglieder usw. liegt auf der Hand, natürlich unter Beherzigung der vorgenommenen Idealisierung. — Andererseits steuert vorliegende Arbeit auf das Problem der *Selbstspannungen* im Ellipsenringe los. — Eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse gab kürzlich Th. Pöschl [7]).

1. Spannungsfunktion und Spannungskomponenten.

Statt der rechtwinkligen ebenen Koordinaten x, y führen wir durch die Funktion $x + iy = c\,\mathfrak{Cof}(\xi + i\eta)$ elliptische Koordinaten ξ, η ein, so daß

$$(1) \qquad \begin{cases} x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta\,, \\ y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta\,. \end{cases}$$

Die zu den Brennpunkten $x = \pm c$, $y = 0$ konfokalen Ellipsen und Hyperbeln sind dann durch $\xi =$ konst. bzw. $\eta =$ konst. gegeben. Der Laplacesche Operator $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ geht über in $\nabla = h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)$, wo $h^2 = \frac{1}{c^2(\mathfrak{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \mathfrak{Cof}^2\xi\sin^2\eta)} = \frac{2}{c^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)}$. Die Differentialgleichung der Airyschen Funktion, $\nabla\nabla\psi = 0$, geht also über in

$$(2) \qquad \nabla^*\left(\frac{\nabla^*\psi}{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta}\right) = 0\,,$$

wenn zur Abkürzung $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} = \nabla^*$ gesetzt wird.

Biharmonische Funktionen, d. h. Lösungen der Gl. (2) oder $\nabla\nabla\psi = 0$, sind nun u. a. alle Funktionen ψ,

1. für die $\nabla\psi = 0$ oder $\nabla^*\psi = 0$: harmonische Funktionen;

2. für die $\nabla^*\psi = (\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)\cdot\varphi$, wo φ eine harmonische Funktion;

3. von der Form $(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta)\cdot\varphi$ und $\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta\cdot\varphi$ und $\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta\cdot\varphi$, wo φ eine harmonische Funktion [8]).

Unser Ziel ist eine Reihe in elliptischen Koordinaten ausgedrückter Elementarlösungen, die die Lösung der Randwertaufgabe für das von

---

[6]) Vgl. die Verwertung der Spannungsfunktion in A. und L. Föppl: Drang und Zwang.

[7]) Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 89.

[8]) Vgl. z. B. E. Almansi: Ann. di mat. **3**, II (1899), und bemerke

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta)\,.$$

zwei konfokalen Ellipsen begrenzte Gebiet ermöglicht. — *Harmonische Elementarlösungen* sind

$$(3)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \mathfrak{Cof}\, m\xi \cos m\eta\,; & \psi_2 = \mathfrak{Sin}\, m\xi \sin m\eta\,; \\ \psi_3 = \mathfrak{Sin}\, m\xi \cos m\eta\,; & \psi_4 = \mathfrak{Cof}\, m\xi \sin m\eta\,, \end{cases}$$

wo m eine beliebige positive ganze Zahl. Aus ihnen gewinnen wir durch Multiplikation mit $\mathfrak{Cof}\, 2\xi + \cos 2\eta$ folgende biharmonische Funktionen:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi + \mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi)\cos m\eta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, m\xi\,(\cos\overline{m+2}\,\eta + \cos\overline{m-2}\,\eta),$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi + \mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi)\sin m\eta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}\, m\xi\,(\sin\overline{m+2}\,\eta + \sin\overline{m-2}\,\eta),$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi + \mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi)\cos m\eta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}\, m\xi\,(\cos\overline{m+2}\,\eta + \cos\overline{m-2}\,\eta),$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi + \mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi)\sin m\eta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, m\xi\,(\sin\overline{m+2}\,\eta + \sin\overline{m-2}\,\eta).$$

Andererseits sind biharmonische Funktionen diejenigen, für die $\nabla^*\psi$ gleich den mit $\mathfrak{Cof}\, 2\xi - \cos 2\eta$ multiplizierten Funktionen (3), also:

$$\psi_1'' = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi}{m+1} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi}{m-1}\right)\cos m\eta + \frac{1}{8}\mathfrak{Cof}\, m\xi\left(\frac{\cos\overline{m+2}\,\eta}{m+1} - \frac{\cos\overline{m-2}\,\eta}{m-1}\right),$$

$$\psi_2'' = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi}{m+1} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi}{m-1}\right)\sin m\eta + \frac{1}{8}\mathfrak{Sin}\, m\xi\left(\frac{\sin\overline{m+2}\,\eta}{m+1} - \frac{\sin\overline{m-2}\,\eta}{m-1}\right),$$

$$\psi_3'' = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi}{m+1} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi}{m-1}\right)\cos m\eta + \frac{1}{8}\mathfrak{Sin}\, m\xi\left(\frac{\cos\overline{m+2}\,\eta}{m+1} - \frac{\cos\overline{m-2}\,\eta}{m-1}\right),$$

$$\psi_4'' = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi}{m+1} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi}{m-1}\right)\sin m\eta + \frac{1}{8}\mathfrak{Cof}\, m\xi\left(\frac{\sin\overline{m+2}\,\eta}{m+1} - \frac{\sin\overline{m-2}\,\eta}{m-1}\right).$$

Durch Zusammenfassen der Funktionen ψ_1', ψ_1'' usw. erhalten wir folgende *biharmonische Elementarlösungen*:

$$(4)\qquad \begin{cases} \psi_5 = \mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta + \mathfrak{Cof}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\,, \\ \psi_6 = \mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta + \mathfrak{Sin}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\,, \\ \psi_7 = \mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta + \mathfrak{Sin}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\,, \\ \psi_8 = \mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta + \mathfrak{Cof}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\,. \end{cases}$$

Nehmen wir noch die harmonischen Elementarlösungen $\psi = 1$, $\psi = \xi$ hinzu und bezeichnen wir mit a_m, α_m; b_m, β_m; c_m, γ_m; d_m, δ_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ beliebige Konstanten, so ergibt sich für die Darstellung einer im Ellipsenring *einwertigen* und mit ihren Ableitungen stetigen biharmonischen Funktion folgende Reihenentwicklung:

$$
(5)\quad
\begin{cases}
\psi = a_0 + b_0 \operatorname{Cof} 2\xi + \alpha_0 \xi + \beta_0 \operatorname{Sin} 2\xi \\
\quad + (a_1 \operatorname{Cof} \xi + b_1 \operatorname{Cof} 3\xi + \alpha_1 \operatorname{Sin} \xi + \beta_1 \operatorname{Sin} 3\xi) \cos \eta \\
\quad + (c_1 \operatorname{Cof} \xi + d_1 \operatorname{Cof} 3\xi + \gamma_1 \operatorname{Sin} \xi + \delta_1 \operatorname{Sin} 3\xi) \sin \eta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m \operatorname{Cof} m\xi + b_m \operatorname{Cof} \overline{m+2}\,\xi + b_{m-2} \operatorname{Cof} \overline{m-2}\,\xi \\
\qquad + \alpha_m \operatorname{Sin} m\xi + \beta_m \operatorname{Sin} \overline{m+2}\,\xi + \beta_{m-2} \operatorname{Sin} \overline{m-2}\,\xi) \cos m\eta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} (c_m \operatorname{Cof} m\xi + d_m \operatorname{Cof} \overline{m+2}\,\xi + d_{m-2} \operatorname{Cof} \overline{m-2}\,\xi \\
\qquad + \gamma_m \operatorname{Sin} m\xi + \delta_m \operatorname{Sin} \overline{m+2}\,\xi + \delta_{m-2} \operatorname{Sin} \overline{m-2}\,\xi) \sin m\eta .
\end{cases}
$$

Durch gliedweise Differentiation[9]) nach ξ erhalten wir eine Reihe (5*) für den Gradienten in Richtung der Normalen n eines elliptischen Randes. Beim Randwertproblem der biharmonischen Funktionen müssen nun auf zwei elliptischen Rändern die Werte von ψ und $\frac{d\psi}{dn}$ gegeben sein, wobei $\frac{d\psi}{dn} = -h\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ für den inneren Rand $\xi = \xi'$, $\frac{d\psi}{dn} = h\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ für den äußeren Rand $\xi = \xi''$. Demgemäß seien folgende Fourier-Entwicklungen als gegeben angenommen:

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\psi' = A_0' + \sum_{m=1}^{\infty} A_m' \cos m\eta + \sum_{m=1}^{\infty} C_m' \sin m\eta , \\
\psi'' = A_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} A_m'' \cos m\eta + \sum_{m=1}^{\infty} C_m'' \sin m\eta ;
\end{cases}
$$

$$
(6^*)\quad
\begin{cases}
\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)' = B_0' + \sum_{m=1}^{\infty} B_m' \cos m\eta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m' \sin m\eta , \\
\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)'' = B_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} B_m'' \cos m\eta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m'' \sin m\eta .
\end{cases}
$$

Führt man in (5) und (5*) für ξ die Werte ξ' und ξ'' ein und identifiziert die entstehenden Reihen gliedweise mit (6) und (6*), so ergeben sich Gleichungssysteme G^m von folgendem Charakter: In G^0, G^1 stehen zur Bestimmung von je vier unbekannten Koeffizienten ebenso viele Gleichungen zur Verfügung; die übrigen, an sich immer zwei überzählige Unbekannte enthaltenden G^m dienen sodann als Rekursionsformeln zur Bestimmung der höheren Koeffizienten.

Dies Verfahren ist nun mit einer gewissen Modifikation auf die Airysche Spannungsfunktion für den Ellipsenring anzuwenden. Wenn die auf rechtwinklige Koordinaten x, y bezogenen Komponenten F, G der

---

[9]) Betr. Konvergenz und Differenzierbarkeit dieser Reihen vgl. die Sätze von T. Boggio: Atti R. Ist. Veneto 60, II (1900/01), S. 591; Boggio gibt eine andere Lösung der Randwertaufgabe für die einwertige biharmonische Funktion.

Randspannungen gegeben sind, so ist allgemein nach Maxwell und Michell auf einer Randkurve:

$$(7) \qquad \psi = \int_0^s \left(H \frac{dx}{ds} + K \frac{dy}{ds} \right) ds + \alpha x + \beta y + \gamma ,$$

$$(7^*) \qquad \frac{d\psi}{dn} = H \frac{dy}{ds} - K \frac{dx}{ds} + \alpha \frac{dy}{ds} - \beta \frac{dx}{ds} ,$$

wo s die Randbogenlänge, $H = -\int_0^s G\,ds$, $K = \int_0^s F\,ds$ (vorausgesetzt, daß keine Massenkräfte wirken). α, β, γ bedeuten gewisse Konstante, die für einfach zusammenhängende Gebiete gleich 0 gesetzt werden können, da die Überlagerung einer die Spannungskomponenten nicht beeinflussenden Lösung $\psi = -\alpha x - \beta y - \gamma$ sie verschwinden läßt. Bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten entspricht jedem Rande ein Konstantentripel, und diese Konstantentripel können, *wenn von Eigenspannungen abgesehen wird*, alle bis auf eines durch die Forderung der *Einwertigkeit der Verschiebungen* bestimmt werden, deren Bedingungen Michell[10]) allgemein in Form von Randintegralbeziehungen für ψ formuliert hat. Dabei braucht nun ψ *selbst nicht mehr eine einwertige Funktion* zu sein. Andererseits können wir, unter Aufrechterhaltung der Bedingung einwertiger Spannungen, *mehrwertige Verschiebungen* zunächst zulassen und uns dann dieser Mehrwertigkeit wieder dadurch entledigen, daß wir das Gebiet durch Schnitte auf ein einfach zusammenhängendes zurückführen, in den Schnittflächen erforderlichenfalls den (durch die Mehrwertigkeit hereinkommenden) Materialüberfluß oder -mangel beseitigen und schließlich die ausgeglichenen Schnittflächen durch Verlöten oder Vernieten wieder miteinander verbinden. Denken wir uns diesen Prozeß im Falle $F = 0$, $G = 0$ durchgeführt, so erkennen wir, daß die Konstantentripel α, β, γ alle, bis auf eines, *je* ∞^3 *Selbstspannungen charakterisieren.*

Für das zweifach zusammenhängende Gebiet, das uns beschäftigt, den Ellipsenring, kommt *ein wesentliches* Konstantentripel in Frage, das den ∞^3 im Ellipsenring möglichen Selbstspannungen entspricht oder andererseits für die Erfüllung der Bedingung der Einwertigkeit der Verschiebungen zur Verfügung stehen muß. Die einwertige biharmonische Funktion (5) ist daher für das Spannungsproblem um drei geeignete Elementarlösungen zu ergänzen, die selbst mehrwertig sein können, aber die Spannungskomponenten einwertig liefern müssen. Da die Terme $a_0 + a_1 \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\eta + \gamma_1 \mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta$ in (5) keinen Beitrag zu den Spannungen liefern, so erhöht

[10]) Lond. Math. Soc. Proc. **31** (1899), S. 100.

sich die Zahl der erforderlichen Ergänzungslösungen der eben geschilderten Art auf 6. Wir werden nun erkennen, daß die für den Ellipsenring geeigneten 6 *Ergänzungslösungen* die folgenden sind:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi\,(\mathfrak{Cof}\,2\xi+\cos 2\eta)-\mathfrak{Sin}\,2\xi;\ \eta; \\ \xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta;\ \ \xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta;\ \ \eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta;\ \ \eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta. \end{cases}$$

Die Airysche Funktion für den Ellipsenring schreibt sich demnach folgendermaßen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \psi = a_0+b_0\,\mathfrak{Cof}\,2\xi+\alpha_0\,\xi+\beta_0\,\mathfrak{Sin}\,2\xi+\mathfrak{A}_0\,[\xi(\mathfrak{Cof}\,2\xi+\cos 2\eta) \\ \quad -\mathfrak{Sin}\,2\xi]+\mathfrak{B}_0\,\eta+(a_1\,\mathfrak{Cof}\,\xi+\mathfrak{A}_1\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi+\mathfrak{B}_1\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi \\ \quad +b_1\,\mathfrak{Cof}\,3\xi+\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi+\beta_1\,\mathfrak{Sin}\,3\xi)\cos\eta+(c_1\,\mathfrak{Cof}\,\xi+d_1\,\mathfrak{Cof}\,3\xi \\ \quad +\gamma_1\,\mathfrak{Sin}\,\xi+\mathfrak{C}_1\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi+\mathfrak{D}_1\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi+\delta_1\,\mathfrak{Sin}\,3\xi)\sin\eta \\ \quad +\sum_{m=2}^{\infty}(a_m\,\mathfrak{Cof}\,m\xi+b_m\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi+b_{m-2}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi \\ \quad +\alpha_m\,\mathfrak{Sin}\,m\xi+\beta_m\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi+\beta_{m-2}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi)\cos m\eta \\ \quad +\sum_{m=2}^{\infty}(c_m\,\mathfrak{Cof}\,m\xi+d_m\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi+d_{m-2}\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m-2}\,\xi \\ \quad +\gamma_m\,\mathfrak{Sin}\,m\xi+\delta_m\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi+\delta_{m-2}\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m-2}\,\xi)\sin m\eta. \end{cases}$$

Von der gewöhnlichen biharmonischen Funktion (5) unterscheidet sie sich charakteristisch durch die den Faktor η enthaltenden mehrwertigen Glieder.

Die dieser Funktion entsprechenden Spannungen sind einwertig. Nach Michell[10]) und Pöschl[10a]) leiten sich nämlich die auf elliptische Koordinaten bezogenen Spannungskomponenten, in der Bezeichnungsweise von A. E. H. Love[11]), durch folgende Formeln aus der Airyschen Funktion her:

$$(10)\qquad \begin{cases} \overline{\xi\xi}=h^2\left[\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\xi\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}-\sin 2\eta\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right], \\ \overline{\eta\eta}=h^2\left[\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\xi\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}-\sin 2\eta\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right], \\ \overline{\xi\eta}=h^2\left[-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}+\dfrac{\sin 2\eta\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}+\mathfrak{Sin}\,2\xi\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right]. \end{cases}$$

Die Rechnung zeigt, daß auch die mit dem Faktor η behafteten Elementarlösungen einwertige Spannungen liefern. Wir stellen die für die praktischen Anwendungen besonders wichtigen, den niederen Termen entsprechenden Spannungen $\overline{\xi\xi}$, $\overline{\eta\eta}$, $\overline{\xi\eta}$ nachfolgend zusammen:

[10a]) A. a. O.

[11]) Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, S. 105.

ψ	$\overline{\xi\xi}$	$\overline{\eta\eta}$	$\overline{\xi\eta}$
$\mathfrak{Cof}\,2\xi+\cos 2\eta$	$\frac{4}{c^2}$	$\frac{4}{c^2}$	0
ξ	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$-\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$\frac{c^2}{2}h^4\sin 2\eta$
$\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\,\mathfrak{Cof}\,2\xi$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\,(\mathfrak{Cof}\,2\xi-2\cos 2\eta)$	$c^2h^4\,\mathfrak{Cof}\,2\xi\sin 2\eta$
$\sin 2\eta$	$-c^2h^4\,(2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)\sin 2\eta$	$c^2h^4\sin 2\eta\cos 2\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\cos 2\eta$
$2\xi+\cos 2\eta)$ $\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$\frac{4\xi}{c^2}-h^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$\frac{4\xi}{c^2}+h^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$h^2\sin 2\eta$
η	$-\frac{c^2}{2}h^4\sin 2\eta$	$+\frac{c^2}{2}h^4\sin 2\eta$	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$
$\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta$	$-c^2h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta$
$\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta$	$-c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta$
$\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\cos\eta$	$2h^2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta\left[-\frac{c^2}{2}h^2\,\mathfrak{Cof}^2\xi+1\right]$	$c^2h^4\,\mathfrak{Cof}^3\xi\sin\eta$
$\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$	$-2h^2\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta\left[\frac{c^2}{2}h^2\cos^2\eta+1\right]$	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta\sin 2\eta$	$c^2h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos^3\eta$
$\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\sin\eta$	$2h^2\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta\left[-\frac{c^2}{2}h^2\,\mathfrak{Sin}^2\xi+1\right]$	$-c^2h^4\,\mathfrak{Sin}^3\xi\cos\eta$
$\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$	$2h^2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta\left[-\frac{c^2}{2}h^2\sin^2\eta+1\right]$	$\frac{c^2}{2}h^4\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta\sin 2\eta$	$-c^2h^4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin^3\eta$

Um die Bedingung für die Einwertigkeit der Verschiebungen ansetzen bzw. den Charakter der möglichen Eigenspannungen klarstellen zu können, empfiehlt es sich, die den einzelnen Elementarlösungen entsprechenden Verschiebungen zu bestimmen; ihre Kenntnis wird zudem bei Randwertaufgaben erfordert, bei denen die Verschiebungen in den Randbedingungen vorkommen.

2. Verschiebungen.

Die Verschiebung habe, zerlegt nach den krummlinigen Koordinaten ξ, η, die Komponenten u_ξ, u_η. Die Verzerrungskomponenten $e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, e_{\xi\eta}$ drücken sich nach Love[12]) wie folgt durch die Verschiebungskomponenten aus:

$$(11)\quad \begin{cases} e_{\xi\xi} = h\dfrac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + h^2 u_\eta \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{1}{h}\right) = h\left(\dfrac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + \dfrac{u_\eta \sin 2\eta}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right); \\ e_{\eta\eta} = h\dfrac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + h^2 u_\xi \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{1}{h}\right) = h\left(\dfrac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \dfrac{u_\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\xi}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right); \\ e_{\xi\eta} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}(h u_\eta) + \dfrac{\partial}{\partial\eta}(h u_\xi) = h\left(\dfrac{\partial u_\eta}{\partial\xi} + \dfrac{\partial u_\xi}{\partial\xi} - \dfrac{u_\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\xi + u_\xi \sin 2\eta}{\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\right). \end{cases}$$

[12]) Lehrbuch der Elastizität, S. 64.

Dilatation Δ und Drehung $\tilde{\omega}$ ergeben sich aus folgenden Formeln:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta}{h^2} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{u_\xi}{h}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{u_\eta}{h}\right); \\ \dfrac{2\tilde{\omega}}{h^2} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{u_\eta}{h}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{u_\xi}{h}\right). \end{cases}$$

Die Beziehungen zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten lauten beim ebenen Problem:

$$(13)\qquad \begin{cases} \overline{\xi\xi} = (\lambda + 2\mu)\, e_{\xi\xi} + \lambda\, e_{\eta\eta}; \\ \overline{\eta\eta} = \lambda\, e_{\xi\xi} + (\lambda + 2\mu)\, e_{\eta\eta}; \\ \overline{\xi\eta} = \mu\, e_{\xi\eta}. \end{cases}$$

Hierin sind λ, μ für den Fall der „ebenen Verzerrung“ (des unendlich langen Zylinders, Fall a) bei Michell) die Laméschen Elastizitätskonstanten; im Fall der „ebenen Spannung“ (unendlich dünne Scheibe, Fall b) bei Michell) ist λ durch $\frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$ zu ersetzen.

a) Harmonische Elementarlösungen.

Wir machen den Ansatz[13])

$$(14)\qquad 2\mu u_\xi = -h\frac{\partial \psi}{\partial \xi}; \qquad 2\mu u_\eta = -h\frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Damit würde sich gemäß (11) ergeben:

$$2\mu e_{\xi\xi} = -h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - h\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi} + h\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta} = -h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

$$2\mu e_{\eta\eta} = -h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} - h\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta} + h\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi} = -h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} - h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

$$2\mu e_{\xi\eta} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h^2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(h^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) = -2h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta} + 2h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + 2h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

Alsdann würde (13) unter Berücksichtigung von $\nabla\psi = 0$ liefern:

$$\overline{\xi\xi} = h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta};$$

$$\overline{\eta\eta} = h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta};$$

$$\overline{\xi\eta} = -h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta} + h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

Das sind aber genau die zuerst von Michell angegebenen Formeln für die Spannungskomponenten, ausgedrückt durch die Spannungsfunktion, die

[13]) Vgl. den für rechtwinklige Koordinaten durchgeführten Ansatz von Love, S. 243.

bei elliptischen Koordinaten in die Formeln (10) übergehen. *Der Ansatz* (14) *gilt daher bei beliebigen krummlinigen Koordinaten gleichen Differentialparameters h.*

Für unsern Fall liefert er:

(15)

ψ	$\frac{u_\xi}{h}$	$\frac{u_\eta}{h}$
ψ_1	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Sin} m\xi \cos m\eta$	$+\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Cof} m\xi \sin m\eta$
ψ_2	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Cof} m\xi \sin m\eta$	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Sin} m\xi \cos m\eta$
ψ_3	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Cof} m\xi \cos m\eta$	$+\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Sin} m\xi \sin m\eta$
ψ_4	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Sin} m\xi \sin m\eta$	$-\frac{1}{2\mu} m \operatorname{Cof} m\xi \cos m\eta$
ξ	$-\frac{1}{2\mu}$	0
η	0	$-\frac{1}{2\mu}$

Man überzeugt sich, daß die der Elementarlösung $\psi = \operatorname{Cof}\xi \cos\eta$ entsprechenden Verschiebungskomponenten

(16)
$$\begin{cases} u_\xi = -\frac{1}{2\mu} \frac{\operatorname{Sin}\xi\cos\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}}; \\ u_\eta = \frac{1}{2\mu} \frac{\operatorname{Cof}\xi\sin\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}} \end{cases}$$

eine konstante Verschiebung $-\frac{1}{2\mu c}$ parallel der x-Achse bedeuten; ebenso bedeuten die der Elementarlösung $\psi = \operatorname{Sin}\xi \sin\eta$ entsprechenden Komponenten

(17)
$$\begin{cases} u_\xi = -\frac{1}{2\mu} \frac{\operatorname{Cof}\xi\sin\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}}; \\ u_\eta = -\frac{1}{2\mu} \frac{\operatorname{Sin}\xi\cos\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}} \end{cases}$$

eine konstante Verschiebung $-\frac{1}{2\mu c}$ parallel der η-Achse.

Unsere sämtlichen harmonischen Elementarlösungen liefern einwertige Verschiebungen.

Man bemerke dies ausdrücklich für die den Fällen $m = 1$, $m = 2$ entsprechenden niederen Lösungen!

b) Reguläre biharmonische Elementarlösungen.

Einen Hinweis zur Bestimmung der Verschiebungskomponenten gibt die Bemerkung, daß $(\lambda+2\mu)\Delta$ und $2\mu\tilde{\omega}$ nach den Grundgleichungen der Elastizität konjugierte harmonische Funktionen sind[13]) und daß $\Delta = \frac{1}{2(\lambda+\mu)} V\psi$. Aus Δ und $\tilde{\omega}$ gewinnt man mittels der Formeln (12) einen Ansatz für u_ξ, u_η, dessen Richtigkeit schließlich mit Hilfe der Beziehungen (11) und (13) zu prüfen ist. Wir finden so für ψ_5:

$$(\lambda+2\mu)\Delta = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} 2(m+1)h^2 \left(\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi \cos m\eta - \mathfrak{Cof}\, m\xi \cos\overline{m+2}\,\eta\right);$$

$$2\mu\tilde{\omega} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} 2(m+1)h^2 \left(\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi \sin m\eta - \mathfrak{Sin}\, m\xi \sin\overline{m+2}\,\eta\right).$$

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta\right. \\ \qquad \left. +(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\right]; \\ \frac{u_\eta}{h} = \frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta\right. \\ \qquad \left. +(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\right]. \end{cases}$$

Entsprechend für ψ_6, ψ_7, ψ_8:

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta\right. \\ \qquad \left. +(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\right]; \\ \frac{u_\eta}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(m+\overline{2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta\right. \\ \qquad \left. +(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\right). \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta\right. \\ \qquad \left. +(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\right]; \\ \frac{u_\eta}{h} = \frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta\right. \\ \qquad \left. +(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\right]. \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\,\overline{m+2}\,\xi\sin m\eta\right. \\ \qquad \left. -(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Sin}\, m\xi\sin\overline{m+2}\,\eta\right]; \\ \frac{u_\eta}{h} = -\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}\left[(\overline{m+2}\,\lambda+\overline{m+4}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\,\overline{m+2}\,\xi\cos m\eta\right. \\ \qquad \left. +(m\lambda+\overline{m-2}\,\mu)\,\mathfrak{Cof}\, m\xi\cos\overline{m+2}\,\eta\right]. \end{cases}$$

Unsere sämtlichen regulären biharmonischen Elementarlösungen liefern einwertige Verschiebungen. Beispielsweise:

(22)

ψ	$\frac{u_\xi}{h}$	$\frac{u_\eta}{h}$
$\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta$	$\frac{1}{\lambda+\mu}\,\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$-\frac{1}{\lambda+\mu}\sin 2\eta$
$\mathfrak{Sin}\,2\xi$	$-\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}[-2\mu\,\mathfrak{Cof}\,2\xi + 2(\lambda+2\mu)\cos 2\eta]$	0
$\sin 2\eta$	0	$-\frac{1}{2\mu(\lambda+\mu)}[2(\lambda+2\mu)\,\mathfrak{Cof}\,2\xi - 2\mu\cos 2\eta]$

c) Biharmonische Ergänzungslösungen.

$$\psi = \xi(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta) - \mathfrak{Sin}\,2\xi.$$

Dilatation und Drehung bestimmen sich durch die konjugierten harmonischen Funktionen:

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{4}{c^2}\,\xi, \qquad 2\mu\,\tilde{\omega} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{4}{c^2}\,\eta.$$

Unter Berücksichtigung von (12) ergibt der Ansatz

$$\frac{u_\xi}{h} = a\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\xi + b\eta\sin 2\eta + e\,\mathfrak{Cof}\,2\xi + f\cos 2\eta,$$

$$\frac{u_\eta}{h} = c\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\xi + d\xi\sin 2\eta$$

folgende mit (11), (13) im Einklang stehende Lösung:

(23)
$$\begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\xi + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,\eta\sin 2\eta - \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\,\mathfrak{Cof}\,2\xi + \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\cos 2\eta\right]; \\ \frac{u_\eta}{h} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\xi - \xi\sin 2\eta\right]. \end{cases}$$

In beiden Verschiebungskomponenten haben wir ein mehrwertiges Glied.

Für $\psi = \xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$ ergibt sich nach demselben Verfahren:

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,h^2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta; \qquad 2\mu\,\tilde{\omega} = -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,h^2\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta.$$

(24)
$$\begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu}\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta; \\ \frac{u_\eta}{h} = -\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta. \end{cases}$$

Entsprechend für die Funktionen $\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$; $\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$; $\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$:

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = & -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta; \\ \frac{u_\eta}{h} = -\frac{1}{2\mu}\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta & -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta - \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta. \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = -\frac{1}{2\mu}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta & -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta; \\ \frac{u_\eta}{h} = & +\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta. \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{u_\xi}{h} = & +\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta; \\ \frac{u_\eta}{h} = -\frac{1}{2\mu}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta & -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta. \end{cases}$$

Auch die Lösungen (24), (25), (26), (27) *enthalten mehrwertige Glieder.* Um *einwertige* Verschiebungen zu erzielen, müssen die Koeffizienten der Ergänzungslösungen in der Airyschen Funktion für den Ellipsenring, Formel (9), folgenden *Bedingungen* unterworfen werden:

$$(28)\qquad \mathfrak{A}_0 = 0,$$

$$(29)\qquad (\lambda+2\mu)\,\mathfrak{A}_1 + \mu\,\mathfrak{D}_1 = 0,$$

$$(30)\qquad \mu\,\mathfrak{B}_1 - (\lambda+2\mu)\,\mathfrak{C}_1 = 0.$$

3. Die Randwertaufgabe.

Bedeuten F, G die auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Komponenten der Randspannung, so gilt nach Maxwell und Michell für einen beliebigen Punkt einer Randkurve:

$$(31)\qquad \psi = \int_0^s \left(H\frac{dx}{ds} + K\frac{dy}{ds}\right) ds + \alpha x + \beta y + \gamma;$$

$$(31^*)\qquad \frac{d\psi}{dn} = H\frac{dy}{ds} - K\frac{dx}{ds} + \alpha\frac{dy}{ds} - \beta\frac{dx}{ds}.$$

Hierin s die Randbogenlänge, $H = -\int_0^s G\,ds$, $K = \int_0^s F\,ds$. Danach wird ψ auf dem Rande i. a. eine mehrwertige Funktion von s, ebenso $\frac{d\psi}{dn}$. Geometrisch haben Klein und Wieghardt[4]) die Randbedingung dahin gedeutet, daß es eine „affin-periodische" abwickelbare Fläche gibt, an die sich die gesuchte Airysche Fläche ψ längs des Randes ohne Knick an-

schließen muß. Für den im Randpunkt x_0, y_0 beginnenden und endigenden Randumlauf erhalten wir in der Tat:

$$[\psi]_0^0 = \int_0^0 \left(H\frac{dx}{ds} + K\frac{dy}{ds}\right) ds = [Hx]_0^0 + [Ky]_0^0 - \int_0^s \left(\frac{dH}{ds}x + \frac{dK}{ds}y\right) ds$$

$$= -x_0 \int_0^0 G\,ds + y_0 \int_0^0 F\,ds + \int_0^0 (Gx - Fy)\,ds.$$

Nun bedeuten $X = \int_0^0 F\,ds$, $Y = \int_0^0 G\,ds$ die Komponenten der Resultante der Randspannungen, $M = \int_0^0 (Gx - Fy)\,ds$ das resultierende Moment. Wir können daher schreiben:

$$[\psi]_0^0 = M - Yx_0 + Xy_0. \tag{32}$$

Ähnlich ergibt sich

$$\left[\frac{d\psi}{dn}\right]_0^0 = -X\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 - Y\left(\frac{dy}{ds}\right)_0. \tag{32*}$$

Bei einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet bestimmt man den Umlaufungssinn der einzelnen Ränder, indem man es durch Schnitte auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet zurückführt und den in sich geschlossenen Rand dieses letzteren einmal ganz umfährt[14]). Dementsprechend ist beispielsweise für die beiden Ränder eines zweifach zusammenhängenden Gebiets der entgegengesetzte Umlaufungssinn zu wählen.

Nach (32) ist die Airysche Funktion auf jedem Rande eine mehrwertige Funktion von s mit der Periode $M - Yx + Xy$ oder in elliptischen Koordinaten:

$$[\psi]_0^0 = M - Yc\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + Xc\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta. \tag{33}$$

Wir stellen uns nun einmal für den Ellipsenring Randspannungen vor, wie sie den verschiedenen Elementarlösungen in (9) entsprechen. Da für alle einwertigen Spannungsfunktionen $[\psi]_0^0 = 0$, so genügen die ihnen entsprechenden Randspannungen der Bedingung $M = X = Y = 0$: *die auf den einzelnen Rand wirkenden Spannungen bilden bei einwertigen Spannungsfunktionen je für sich ein Gleichgewichtssystem.*

Dagegen hat die biharmonische Funktion

$$\Psi = \mathfrak{B}_0\eta + \mathfrak{B}_1\eta\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + \mathfrak{D}_1\eta\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta \tag{34}$$

---

[14]) Nur so erhalten die geschlossenen Integrale H und K auch dem Vorzeichen nach einheitliche Bedeutung als Kräfteresultanten.

die Periode $2\pi(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta + \mathfrak{D}_1 \mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta)$. Die ihr entsprechenden Randspannungen liefern ein resultierendes System M, X, Y, und zwar findet sich durch Vergleich mit (33):

$$(35) \qquad \mathfrak{B}_0 = \frac{M}{2\pi}; \quad \mathfrak{B}_1 = -\frac{cY}{2\pi}; \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{cX}{2\pi}.$$

Die Periode der ebenfalls mehrwertigen Funktion $\frac{d\Psi}{dn} = h\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$ wird

$$h \cdot 2\pi(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta + \mathfrak{D}_1 \mathfrak{Cof}\,\xi\sin\eta)$$

und stimmt, wie man leicht nachweist, mit (32*) überein, wenn die Koeffizienten der Bedingung (35) gemäß gewählt werden. *Ψ ist also die für den Ellipsenring charakteristische affinperiodische Airysche Funktion.*

Ist nun ein beliebiger Belastungsfall für den Ellipsenring vorgelegt, so bestimmen wir für einen der beiden Ränder aus den gegebenen Randspannungen die Größen M, X, Y und daraus gemäß (35) die Koeffizienten $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{D}_1$ der mehrwertigen Terme der gesuchten Spannungsfunktion (9).

Sind Selbstspannungen ausgeschlossen, also mehrwertige Verschiebungen unzulässig, so sind diese drei mehrwertigen Elementarlösungen mit den drei anderen „Ergänzungslösungen" $\mathfrak{A}_0[\xi(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta) - \mathfrak{Sin}\,2\xi]$, $\mathfrak{A}_1\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$, $\mathfrak{C}_1\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$ zu koppeln gemäß (28), (29), (30):

$$\mathfrak{A}_0 = 0, \quad \mathfrak{A}_1 = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\mathfrak{D}_1; \quad \mathfrak{C}_1 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\mathfrak{B}_1.$$

Die den sechs Ergänzungslösungen entsprechenden Randspannungen werden nun von dem gegebenen System von Randspannungen in Abzug gebracht. Zu dem verbleibenden „Rumpfsystem" von Randspannungen muß dann eine Airysche Funktion ψ_r gehören, die mit ihrer Ableitung $\frac{d\psi_r}{dn}$ auf jedem der beiden Ränder eine *einwertige* Funktion der Bogenlänge darstellt. Diese Rumpffunktion ψ_r kann also nach dem an die Formeln (5), (5*) anknüpfenden Verfahren ermittelt werden. — Wegen der erwähnten Koppelung der Koeffizienten erweist sich der *Spannungszustand im Ellipsenringe im allgemeinen als von den Elastizitätskonstanten abhängig.* Nur wenn die äußeren Kräfte längs jedes Randes im Gleichgewicht stehen oder ein resultierendes Kräftepaar ergeben, besteht diese Abhängigkeit nicht.

Kommen Selbstspannungen in Frage, so zerlegt man den Spannungszustand von vornherein in zwei Systeme: eines, das sich aus den äußeren Kräften nach dem eben beschriebenen Verfahren bestimmt, und ein reines Selbstspannungsystem Ψ_0, bei dem die Randspannungen durchweg gleich 0 sind, so daß die Randbedingungen die Form annehmen:

$$\Psi_0' = \alpha' c \operatorname{Cof} \xi' \cos \eta + \beta' c \operatorname{Sin} \xi' \sin \eta + \gamma';$$
$$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi}\right)' = \alpha' c \operatorname{Sin} \xi' \cos \eta + \beta' c \operatorname{Cof} \xi' \sin \eta;$$

$$\Psi_0'' = \alpha'' c \operatorname{Cof} \xi'' \cos \eta + \beta'' c \operatorname{Sin} \xi'' \sin \eta + \gamma'';$$
$$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi}\right)'' = \alpha'' c \operatorname{Sin} \xi'' \cos \eta + \beta'' c \operatorname{Cof} \xi'' \sin \eta.$$

n Ψ_0 müssen die mit $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{D}_1$ multiplizierten „Ergänzungslösungen" vegen (35) fehlen. Außerdem kommen die Glieder

$$a_0 + a_1 \operatorname{Cof} \xi \cos \eta + \gamma_1 \operatorname{Sin} \xi \sin \eta,$$

lie mit der Unterschiedlichkeit der analogen Glieder der auf den beiden Randellipsen geltenden Randbedingungen nicht in Einklang stehen, in Wegfall. Die in (9) verbleibenden Glieder gestatten die Bestimmung von Ψ_0 nach dem an (5), (5*) anknüpfenden Verfahren.

Wesentlich ist es, daß die mit $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{C}_1$ multiplizierten Ergänzungslösungen heranzuziehen sind, wodurch in die Verschiebungen folgende mehrwertige Terme hereinkommen:

36)
$$\begin{cases} \dfrac{(u_\xi)}{h} = \mathfrak{A}_0 \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \eta \sin 2\eta + \mathfrak{A}_1 \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \eta \operatorname{Cof} \xi \sin \eta \\ \qquad\qquad - \mathfrak{C}_1 \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \eta \operatorname{Sin} \xi \cos \eta; \\ \dfrac{(u_\eta)}{h} = \mathfrak{A}_0 \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \eta \operatorname{Sin} 2\xi + \mathfrak{A}_1 \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \eta \operatorname{Sin} \xi \cos \eta \\ \qquad\qquad + \mathfrak{C}_1 \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \eta \operatorname{Cof} \xi \sin \eta. \end{cases}$$

a) Selbstspannungstyp $\mathfrak{A}_0$.

Im Schnitt der positiven x-Achse mit dem Ellipsenringe ($\eta = 0$ bzw. $= 2\pi$) fällt das $\mathfrak{A}_0$-Glied aus (u_ξ) heraus; dagegen ergibt sich hier $u_\eta) = 0$ für $\eta = 0$,

$$(u_\eta) = \mathfrak{A}_0 \frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{2\pi}{c} \frac{\operatorname{Sin} 2\xi}{\operatorname{Sin} \xi} = \mathfrak{A}_0 \frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{4\pi}{c} \operatorname{Cof} \xi \quad \text{für} \quad \eta = 2\pi.$$

chneiden wir also den Ellipsenring in $\eta = 0$ auf, so werden die entstehenden Ufer nach der Deformation ohne seitliche Relativverschiebung um en Betrag $\mathfrak{A}_0 \frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{4\pi}{c} \operatorname{Cof} \xi$ punktweise übergreifen bzw. klaffen. Die pannungen sind natürlich auf beiden Ufern die gleichen. Beseitigen wir lso das überschießende bzw. ergänzen wir das fehlende Material und verieten wir die Ufer miteinander, so entsteht der im wesentlichen durch ie Funktion $\mathfrak{A}_0 [\xi (\operatorname{Cof} 2\xi + \cos 2\eta) - \operatorname{Sin} 2\xi]$ charakterisierte Selbst-

spannungszustand, der als *reiner Biegungszustand* im Ellipsenring anzusprechen ist, insofern die dieser Funktion entsprechenden Schubspannungen in den vier Hauptquerschnitten $\eta = 0$, $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \pi$, $\pi = \frac{3\pi}{2}$ verschwinden. (Eben bleiben diese Querschnitte *nicht.*)

b) Selbstspannungstyp $\mathfrak{C}_1$.

Für $\eta = 0$ und $\eta = 2\pi$ fällt das $\mathfrak{C}_1$-Glied in (u_η) heraus; dagegen ergibt sich hier $(u_\xi) = 0$ bzw. $(u_\xi) = -\mathfrak{C}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{2\pi}{c}$. Schneiden wir also den Ellipsenring in $\eta = 0$ auf, so werden die entstehenden Ufer durch die Deformation aneinander um den Betrag $-\mathfrak{C}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{2\pi}{c}$ verschoben, passen aber nach wie vor aufeinander. Die Spannungen sind auf beiden Ufern die gleichen. Durch eine geeignete Materialausgleichung und starre Verbindung der beiden Ufer gewinnen wir den im wesentlichen durch die Funktion $\mathfrak{C}_1 \xi \operatorname{Sin}\xi \sin\eta$ charakterisierten *axialen Selbstspannungszustand* des Ellipsenrings. Typisch sind für das dieser Funktion entsprechende Spannungssystem die Schubspannungen, die in den Querschnitten $\eta = 0$, $\eta = \pi$ ein Maximum besitzen, dagegen für $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \frac{3\pi}{2}$ verschwinden. — Allgemein bedeuten die Terme

$$(u_\xi) = -\mathfrak{C}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\eta \operatorname{Sin}\xi \cos\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}},$$

$$(u_\eta) = \mathfrak{C}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\eta \operatorname{Cof}\xi \sin\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}},$$

eine Verschiebung des Querschnitts $\eta = \text{konst.}$, die seinem Argument proportional und der x-Achse parallel ist, vom Betrage $-\mathfrak{C}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\eta}{c}$.[15])

c) Selbstspannungstyp $\mathfrak{A}_1$.

Die Glieder

$$(u_\xi) = \mathfrak{A}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\eta \operatorname{Cof}\xi \sin\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}},$$

$$(u_\eta) = \mathfrak{A}_1 \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\eta)} \frac{\eta \operatorname{Sin}\xi \sin\eta}{c\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi\cos^2\eta + \operatorname{Cof}^2\xi\sin^2\eta}},$$

charakterisieren in entsprechender Weise einen axialen Selbstspannungszustand des Ellipsenrings, bei dem die Schubspannungen in den Querschnitten $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \frac{3\pi}{2}$ ein Maximum annehmen, während sie in den

[15]) Eine bessere Verwirklichung des axialen Selbstspannungszustandes erreicht man durch das im analogen Fall für den Kreis von mir vorgeschlagene Verfahren, s. Zeitschr. Math. Phys. **52** (1905), S. 376.

Querschnitten $\eta = 0$, $\eta = \pi$ verschwinden. Obige Glieder bedeuten eine Verschiebung jedes Querschnitts $\eta = \text{konst.}$ parallel der y-Achse um den Betrag $+ \mathfrak{A}_1 \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\eta}{c}$.

Schlußbemerkung.

Die für den Ellipsenring ausgeführten Betrachtungen lassen Verallgemeinerungen auf ein beliebiges zweifach zusammenhängendes Gebiet zu, insbesondere betr. einwertige biharmonische Funktion, Ergänzungslösungen und Airysche Funktion; Zusammenhang der mehrwertigen Ergänzungslösungen, d. h. der für das betr. Gebiet charakteristischen affin-periodischen Airyschen Funktion mit den äußeren Kräften; Koppelung der Ergänzungslösungen untereinander bei Ausschluß von Eigenspannungen; Abhängigkeit des Spannungszustandes von den Elastizitätskonstanten; Typen von Selbstspannungszuständen. Die Behandlung der Vollellipse, des Außenraumes der Ellipse und von Gebieten, die von konfokalen hyperbolischen Rändern begrenzt sind, erfordert keine neuen Hilfsmittel.

(Eingegangen am 13. Juni 1922.)

Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten.

Von

Walter Saxer in Zürich.

Die Funktion $g(z) = e^{a \cdot z + b}$, wobei a und b Konstanten bedeuten, hat die Eigenschaft, daß sowohl $g(z)$ als auch $g'(z)$ und $g''(z)$ keine Nullstellen besitzen. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß jede ganze Funktion mit dieser Eigenschaft die Form $e^{a \cdot z + b}$ besitzen muß. Allgemeiner gelten folgende Sätze[1]):

Satz A. *Ist $g(z)$ eine ganze Funktion und besitzen sie und ihre beiden ersten Derivierten $g'(z)$ und $g''(z)$, abgesehen von endlich vielen Stellen, dieselben Nullstellen, so nimmt $g(z)$ folgende Form an:*

$$g(z) = P(z) \cdot e^{Q(z)},$$

in der $P(z)$, $Q(z)$ Polynome bedeuten.

Satz B. *Besitzen $g(z)$, $g'(z)$ und $g''(z)$ Picardsche Ausnahmewerte, so ist*

$$g(z) = P(z) \cdot e^{Q(z)} + a, \tag{1}$$

wobei $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome sind, und a eine Konstante bedeutet.

Wir nennen a einen Picardschen Ausnahmewert von $g(z)$, wenn $g(z) - a$ keine oder nur endlich viele Nullstellen besitzt.

Der augenfällige Ausnahmefall $P(z) \cdot e^{Q(z)} + a$ ist demnach auch der einzige.

Satz C. *Eine Identität von der Form*

$$p(z) \cdot e^{F_1(z)} + q(z) \cdot e^{F_2(z)} + r(z) \cdot F_1'(z) + s(z) = 0 \tag{2}$$

[1]) Die Sätze wurden teilweise in folgenden Arbeiten angekündigt: G. Pólya: Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten, Math. Zeitschrift 12 (1922), S. 38, Fußnote 1a. G. Pólya: Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, Nyt Tidsskrift 1921, S. 21.

zwischen den ganzen Funktionen $F_1(z)$ *und* $F_2(z)$, *sowie den Polynomen* $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$, $s(z)$ *ist unmöglich, wenn folgende vier Voraussetzungen erfüllt sind:*

1. $p(z)$ *verschwindet nicht identisch.*
2. $F_1(z) - F_1(0)$ *verschwindet nicht identisch.*
3. $|r(z)| + |s(z)|$ *verschwindet nicht identisch.*
4. *Wenn* $r(z) \not\equiv 0$ *und* $s(z) \not\equiv 0$, *darf* $\frac{s(z)}{r(z)}$ *keine ganze Funktion sein.*

In Satz C ist also speziell der Satz von Picard enthalten. Man braucht nur $r(z) = 0$ und $s(z) = 1$ zu setzen. Zudem liefert er einen Beitrag zur Beurteilung der Behauptungen, die Borel[2]) in einer bekannten Arbeit aufgestellt hat.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. Im 1. Teil werden wir den Zusammenhang der Sätze A, B mit Satz C klarlegen und verschiedene Zusätze geben.

Das Hauptgewicht liegt im Beweise des Satzes C. Die Theorie der Modulfunktionen, woraus der Satz von Picard abgeleitet werden kann, scheint beim allgemeineren Satze C nicht zum Ziele zu führen. Aber man braucht nur eine der „elementaren" Methoden, die zum Beweise des Picardschen Satzes entwickelt wurden, nämlich die Methode von Wiman und Valiron, ein wenig zu modifizieren, um das Ziel zu erreichen. Bei dieser Methode werden sehr schöne, allgemeine Sätze über die ganzen Funktionen benutzt, die von Wiman[3,4]) in zwei Arbeiten mit Hilfe eines neuen „Prinzipes der Reihenvergleichung" bewiesen wurden. Für den Beweis dieses Prinzipes sind gewisse elementare Ungleichungen wesentlich, die eigentlich in die Theorie der unendlichen Zahlenfolgen gehören. Valiron[5]) hat das Wimansche Prinzip durch geometrische Betrachtungen bewiesen und einen wichtigen Zusatz dazu gegeben. Neuerdings[6]) hat er einen der Sätze, die eine direkte Folge dieses Prinzipes sind, in bemerkenswerter Weise verallgemeinert und wichtige Schlüsse daraus gezogen.

---

[2]) E. Borel: Sur les zéros des fonctions entières, Acta mathematica **20** (1896), S. 368.

[3]) A. Wiman: Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe, Acta mathematica **37** (1914), S. 305–326.

[4]) A. Wiman: Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion, Acta mathematica **41** (1916), S. 1–28.

[5]) G. Valiron: Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières, Annales de l'École Normale Supérieure **37** (1920), S. 220–253.

[6]) G. Valiron: Recherches sur le théorème de M. Picard, Annales de l'École Normale Supérieure **39** (1922), S. 317–341.

Trotzdem werden wir im 2. Teil die Wiman-Valironsche Methode noch einmal darstellen. Es liegt uns vor allem daran, den Kern der Wimanschen Schlußweise, seine Ungleichungen samt dem Zusatz von Valiron, in einer neuen, durchaus elementaren, einfachen und vollständigen Formulierung und Begründung zu geben, was bis heute noch fehlt. Der Vollständigkeit wegen und als Anwendung dieser Ungleichungen beweisen wir daran anschließend die für den Beweis des Satzes C im 3. Teil gebrauchten Sätze.

Satz A, B und C samt Beweisskizze sind mir von Herrn Pólya mitgeteilt worden, und die vorliegende Arbeit ist aus Besprechungen mit ihm hervorgegangen.

I. Die Ausnahmewerte der Derivierten.

§ 1.

Zusammenhang zwischen den Sätzen A und C.

Wir werden zunächst zeigen, daß Satz A eine einfache Folge von Satz C ist. Wenn die Voraussetzungen von Satz A erfüllt sind, müssen $g(z)$, $g'(z)$ und $g''(z)$ nach einem bekannten Satze folgende Gleichungen befriedigen:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{p_1(z)}{p_0(z)} \cdot e^{F_1(z)}, \tag{3a}$$

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{p_2(z)}{p_1(z)} \cdot e^{F_2(z)}. \tag{3b}$$

$p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$ bedeuten Polynome, die nicht teilerfremd zu sein brauchen. Man darf voraussetzen, daß keines von ihnen identisch verschwindet. Denn im anderen Falle wäre $g(z)$ eine Konstante oder eine ganze rationale Funktion vom 1. Grade. Indem man in den Gleichungen (3) ausmultipliziert und nachher Gleichung (3a) noch differentiiert, findet man:

$$\begin{aligned} e^{F_1(z)} \cdot g(z) \cdot p_1(z) \qquad & - p_0(z) \cdot g'(z) & = 0 \\ p_2(z) \cdot e^{F_2(z)} \cdot g'(z) \qquad & - p_1(z) \cdot g''(z) = 0 \\ e^{F_1(z)} g(z)(p_1(z) \cdot F_1'(z) + p_1'(z)) + (e^{F_1(z)} \cdot p_1(z) - p_0'(z)) \cdot g'(z) - p_0(z) \cdot g''(z) = 0 \end{aligned}$$

Damit diese drei linearen, homogenen Gleichungen mit den Unbekannten $e^{F_1(z)} \cdot g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ eine Auflösung besitzen, die nicht identisch verschwindet, muß die Determinante gleich Null sein. Es muß nach Division mit $p_1(z)$ bestehen

$$\begin{aligned} p_1^2(z) \cdot e^{F_1(z)} - p_0(z) \cdot p_2(z) \cdot e^{F_2(z)} + p_1(z) \cdot p_0(z) \cdot F_1'(z) \\ + p_1'(z) \cdot p_0(z) - p_0'(z) \cdot p_1(z) = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$4)\quad \begin{cases} p_1^2(z) = p(z) \not\equiv 0, & -p_0(z)\cdot p_2(z) = q(z) \not\equiv 0, \\ p_0(z)\cdot p_1(z) = r(z) \not\equiv 0, & p_1'(z)\cdot p_0(z) - p_1(z)\cdot p_0'(z) = s(z), \end{cases}$$

$$4')\quad \frac{s(z)}{r(z)} = \frac{p_1'(z)}{p_1(z)} - \frac{p_0'(z)}{p_0(z)}.$$

Sollen also $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ die Voraussetzungen von Satz A erfüllen, so muß wirklich die Identität (2) befriedigt sein. Setzt man nun Satz C als gültig voraus, so ist dies nur möglich, wenn die Gleichung erfüllt ist

$$F_1(z) - F_1(0) \equiv 0.$$

Denn $r(z)$, $p(z)$ verschwinden nicht identisch und $\frac{s(z)}{r(z)}$ ist laut Gleichung $(4')$ eine gebrochene rationale Funktion oder Null. Man erhält, wenn $R(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)} e^{F_1(0)}$ eine gebrochene rationale Funktion bedeutet, der Reihe nach

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = R(z),$$

$$g(z) = e^{\int_{z_0}^{z} R(z)\cdot dz},$$

$$\int_{z_0}^{z} R(z)\,dz = Q(z) + \log P(z).$$

$P(z)$ und $Q(z)$ sind in unserem Falle ganze rationale Funktionen.

Zu dem Satz A kann man folgenden Zusatz formulieren: Die Funktion

$$g(z) = e^{a\cdot z+b}$$

ist die einzige ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß die Nullstellen von $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ dieselben sind. Denn sicherlich müssen die Funktionen mit dieser Eigenschaft laut Satz A zur Funktionsklasse $P(z)\cdot e^{Q(z)}$ gehören. Zudem sollen sie nun noch folgender Bedingung genügen:

$$a\cdot P(z) = P'(z) + Q'(z)\cdot P(z),$$

wobei a eine Konstante bedeutet.

Die Funktion $e^{a\cdot z+b}$ ist demnach auch die einzige ganze Funktion mit der Eigenschaft, daß das Produkt $g(z)\cdot g'(z)\cdot g''(z)$ keine Nullstellen besitzt.

§ 2.

Zusammenhang zwischen den Sätzen B und A, C.

Es ist ebenso leicht, diesen Zusammenhang herzustellen, wenn man noch den folgenden Hilfssatz formuliert.

Hilfsatz. Wenn sowohl eine ganze transzendente[7]) Funktion wie ihre erste Derivierte einen Ausnahmewert besitzen, dann ist der Ausnahmewert der Derivierten notwendigerweise Null.

Denn im Falle, daß a der Ausnahmewert von $g(z)$ und b der Ausnahmewert von $g'(z)$ ist, gilt einerseits

$$g(z) - a = p(z) \cdot e^{-F_1(z)}, \quad \text{also} \quad g'(z) = (p'(z) - F_1'(z) \cdot p(z)) \cdot e^{-F_1(z)},$$

andererseits

$$g'(z) - b = q(z) \cdot e^{F_2(z)}.$$

Wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $g'(z)$ eliminiert, ergibt sich

$$b \cdot e^{F_1(z)} + q(z) \cdot e^{F_1(z)+F_2(z)} + F_1'(z) \cdot p(z) - p'(z) = 0.$$

Laut Satz C ist diese Identität nur möglich, wenn $F_1(z) = F_1(0)$ oder $b = 0$. Im 1. Fall ist aber $g(z)$ ein Polynom. $p(z)$ verschwindet nämlich nicht identisch; ebenso ist $\frac{p'(z)}{p(z)}$ sicherlich keine von Null verschiedene ganze Funktion.

Besitzt nun auch $g''(z)$ einen Ausnahmewert, so muß dieser infolge unseres Hilfssatzes ebenfalls Null sein. Wir setzen:

$$(5) \qquad g(z) - a = l(z), \quad g'(z) = l'(z), \quad g''(z) = l''(z).$$

Die Funktion $l(z)$ ist so beschaffen, daß sie und ihre ersten beiden Ableitungen endlich viele Nullstellen besitzen. Auf $l(z)$ läßt sich demnach der Satz A anwenden. Es ergibt sich

$$l(z) = P(z) \cdot e^{Q(z)},$$

und gemäß Gleichung (5)

$$g(z) = P(z) \cdot e^{Q(z)} + a.$$

II. Die Wimansche Methode der Reihenvergleichung.

§ 3.

Die Funktionen $n(r)$ und $m(r)$.

Es sei eine beliebige ganze transzendente Funktion

$$(6) \qquad F(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \ldots \text{ mit } z = r \cdot e^{i\varphi}$$

gegeben. Weil die Reihe (6) für jeden Wert von z konvergiert, strebt das allgemeine Glied gegen Null. Daher wird für einen festen Wert von $|z| = r$ ein Glied existieren (ev. mehrere), das den größten absoluten Betrag von Allen erreicht. Der absolute Wert dieses „Maximalgliedes"

[7]) Für eine ganze rationale Funktion sind alle Werte Ausnahmewerte.

sei mit $m(r)$ bezeichnet und sein Index heiße $n(r)$. Wir wollen $n(r)$ den „Zentralindex" der Reihe (6) für den Wert r nennen. (Sollten mehrere Maximalglieder existieren, so werde der höchste von den Indizes dieser Glieder als Zentralindex bezeichnet.) Es ist also

$$m(r) = |a_{n(r)}| \cdot r^{n(r)}. \tag{7}$$

Wir wollen die Funktionen $n(r)$ und $m(r)$ diskutieren[8]). Zu diesem Zwecke bilde man die Logarithmen der absoluten Beträge der Glieder der Reihe (6)

$$y = \log|a_l| + l \cdot x, \quad \text{wobei} \quad x = \log r \tag{8}$$

gesetzt ist, und l die Indizes derjenigen Glieder durchläuft, deren Koeffizienten nicht gleich Null sind. Die Bilder dieser linearen Funktionen von x sind Geraden in der (xy)-Ebene. Der Richtungskoeffizient beträgt l. Zwei verschiedene Geraden besitzen verschiedene Richtungskoeffizienten. Die Gerade, die den Richtungskoeffizienten l besitzt, bezeichnen wir kurz als „die Gerade l". Für einen festen Wert von $x = x_0$ wird diejenige Gerade, deren Richtungskoeffizient der Zentralindex ist, das Maximalglied darstellen. Der Zentralindex sei n_k. Jede Gerade mit einem Richtungskoeffizienten $l < n_k$ wird also die Parallele zur y-Achse $x = x_0$ unterhalb der Geraden n_k oder mit ihr schneiden. Weil aber eine solche Gerade flacher als die Gerade n_k ist, wird ihr Bild für $x > x_0$ immer unterhalb der Geraden n_k verlaufen. Sie kann demnach nie mehr das Maximalglied darstellen. D. h.: Die Funktion $n(r)$ kann nicht abnehmen. Ebenso trifft eine Gerade mit einem Richtungskoeffizienten $l > n_k$ die Parallele $x = x_0$ zur y-Achse unterhalb der Geraden n_k. Eine solche Gerade ist aber steiler als die Gerade n_k, und wird sie demnach in einem Punkte mit einer endlichen Abszisse $x > x_0$ treffen. D. h.: Die Gerade n_k wird in einem ganzen Intervalle das Maximalglied darstellen und die Funktion $n(r)$ wird in demselben Intervall den Wert n_k beibehalten. Sobald aber die Gerade n_k eine Gerade $n_{k+1} > n_k$ trifft, wird diese die Rolle des Maximalgliedes übernehmen. (Sollten sich mehrere solcher Geraden im fraglichen Punkte treffen, so bedeute n_{k+1} den höchsten aller Indizes dieser Glieder.) Der Zentralindex wird in dem Schnittpunkte von n_k auf n_{k+1} springen. Zusammenfassend erhält man folgenden

Verlauf von $n(r)$: Es gibt eine unendliche Folge von positiven Zahlen $0 = r_1 < r_2 \ldots$, $\lim_{k=\infty} r_k = \infty$, derart, daß im Intervall $r_k \leqq r < r_{k+1}$ der Zentralindex den Wert n_k besitzt. Die positiven, ganzen Zahlen n_k bilden eine wachsende Folge. Es ist $\lim_{k=\infty} n_k = \infty$.

---

[8]) Wiman, loc. cit. [3]) S. 307; Valiron, loc. cit. [5]) S. 322.

Mit anderen Worten: Im links abgeschlossenen und rechts offenen Intervall $r_k \leqq r < r_{k+1}$ spielt das Glied mit dem Index n_k die Rolle des Maximalgliedes, um sie an der Stelle $r = r_{k+1}$ an ein Glied mit dem höheren Index n_{k+1} abzutreten, welches diese Rolle im Intervall (r_{k+1}, r_{k+2}) beibehält usw.

Verlauf von $m(r)$. Die Funktion $\log m(r)$ ist eine wachsende, stückweise lineare, konvexe Funktion von $\log r$. Ihr Bild ist ein konvexes, ins Unendliche sich erstreckendes Polygon. Die Abszissen der Eckpunkte heißen $\log r_1, \log r_2, \ldots$ Die Seite zwischen $\log r_k$, $\log r_{k+1}$ besitzt den Richtungskoeffizienten n_k.

Wenn (6) keine ganze Funktion wäre, sondern nur eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius bedeuten würde, könnte der Verlauf von $m(r)$ und $n(r)$ nur insofern sich ändern, daß $n(r)$ nicht ins Unendliche wächst innerhalb des Konvergenzbereiches. Es gibt aber Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius, deren Zentralindex ins Unendliche wächst, wenn r dem Konvergenzradius zustrebt. Eine solche erhalten wir folgendermaßen[9]):

Es sei eine unendliche wachsende Folge von positiven Zahlen gegeben:

$$0 < P_1 < P_2 < P_3 \ldots, \quad \lim_{n=\infty} P_n = P \qquad (P \text{ ist endlich}).$$

Die Potenzreihe

$$V(z) = 1 + \frac{z}{P_1} + \frac{z^2}{P_1 P_2} + \ldots + \frac{z^n}{P_1 \ldots P_n} + \ldots \tag{9}$$

hat den Konvergenzradius P, und ihr Maximalglied im Intervall $P_n \leqq r < P_{n+1}$ ist $\frac{z^n}{P_1 \ldots P_n}$.

Man bezeichnet mit $M(r)$ den maximalen, absoluten Betrag der Funktion (6) auf dem Kreise $|z| = r$. Die Funktion $\log M(r)$ ist nach Hadamard ähnlich wie $\log m(r)$ eine wachsende konvexe Funktion von $\log r$.[10]) Nach Cauchy gilt zudem die Ungleichung

$$m(r) < M(r).$$

D. h.: Das Bild von $\log M(r)$ als Funktion von $\log r$ verläuft immer oberhalb des Bildes von $\log m(r)$.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen $m(r)$ und $M(r)$ genauer untersuchen. Zu diesem Zwecke setzt man:

$$F(z) = a_n \cdot z^n \left[1 + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{n-\mu}}{a_n} \cdot \frac{1}{z^\mu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{n+\nu}}{a_n} \cdot z^\nu\right].$$

---

[9]) Vgl. G. Pólya, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Gliede ihrer Taylorreihe, Acta mathematica **41** (1916), S. 311–319.

[10]) Siehe z. B. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin 1916), S. 76.

Man erhält:

$$M(r) \leqq m(r) \cdot \mu(r), \tag{10}$$

wobei

$$\mu(r) = 1 + \sum_{\mu=1}^{n} \left| \frac{a_{n-\mu}}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{r^{\mu}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+\nu}}{a_n} \right| \cdot r^{\nu}. \tag{11}$$

Für die Abschätzung von $\mu(r)$ werden wir nun die in der Einleitung genannten Wimanschen Ungleichungen benutzen.

§ 4.

Hilfssatz von Wiman.[11])

Eine unendliche Folge von positiven Zahlen

$$1 < P_1 < P_2 \ldots, \quad \lim_{n=\infty} P_n = P \qquad (P \text{ ist endlich})$$

sei gegeben. Dann gibt es Werte von r mit der Eigenschaft, daß, wenn $n(r) = n$ gesetzt wird, folgende Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$\text{I.} \quad \frac{|a_{n-\mu}| \cdot r^{n-\mu}}{|a_n| \cdot r^n} \leqq \frac{P_{n-\mu+1} \ldots P_n}{P_n^{\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{II.} \quad \frac{|a_{n+\nu}| \cdot r^{n+\nu}}{|a_n| \cdot r^n} < \frac{P_n^{\nu}}{P_{n+1} \ldots P_{n+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

(Die Normierung $P_1 > 1$ ist durchaus unwesentlich; bei dieser Normierung ist die Ungleichung II auch im Falle $n = 0$ richtig, wenn man $P_0 = 1$ setzt.)

Wenn man die Reihe (6) mit einer Potenzreihe von endlichem Konvergenzradius und von der Form (9) vergleicht, bedeuten diese Ungleichungen einfach folgendes:

Es gibt für jede ganze Funktion $F(z)$ solche Werte von $|z|$, für die das Verhältnis des Maximalgliedes zu irgend einem anderen Gliede von $F(z)$ größer ist als das Verhältnis des Maximalgliedes von $V(P_n)$ zu dem entsprechenden Gliede von $V(P_n)$. n bedeutet dabei den zum fraglichen Wert $|z|$ gehörigen Zentralindex der Potenzreihe von $F(z)$. Aus diesem Grunde nennen wir solche r-Werte, für die Ungleichungen (I) und (II) simultan erfüllt sind, „Vergleichswerte“ der Funktion $F(z)$ in bezug auf die P_n-Folge. Die zu diesen r-Werten gehörigen Zentralindizes nennen wir in analoger Weise „Vergleichsindizes“.

---

[11]) Vgl. Wiman, loc. cit. [3]), S. 310; Pólya, loc. cit. [9]).

Über die Verteilung der Vergleichswerte gibt der folgende Zusatz Aufschluß.

Zusatz von Valiron[12]). *Es gibt eine unendliche Folge von positiven Zahlen*

$$0 = s_1 < s_1' < s_2 < s_2' \ldots, \qquad \lim_{k=\infty} s_k = \infty,$$

die wie folgt beschaffen ist: Im Intervall $s_k \leqq r < s_k'$ *sind sämtliche Ungleichungen* (I) *und* (II) *erfüllt. Im Intervall* $s_k' \leqq r < s_{k+1}$ *sind nicht sämtliche Ungleichungen* (I) *und* (II) *erfüllt. Die Reihe*

$$\log \frac{s_2}{s_1'} + \log \frac{s_3}{s_2'} + \ldots$$

ist konvergent.

Oder anders ausgedrückt: Jene r-Werte, welche keine Vergleichswerte sind, erfüllen auf der Halbgeraden $r \geqq 0$ abzählbar unendlich viele Intervalle. Die Gesamtlänge der entsprechenden Intervalle auf der Geraden $x = \log r$ ist endlich. Man kann die Sachlage auch so ausdrücken: Die Menge aller r-Werte, welche keine Vergleichswerte sind, ist von endlichem logarithmischem Maß. Aus dem Zusatz zieht man sofort folgenden wichtigen Schluß: Die Menge aller jener r-Werte, welche nicht gemeinsame Vergleichswerte für endlich viele ganze Funktionen sind, ist von endlichem logarithmischem Maß.

Um den Beweis des Hilfssatzes samt Zusatz zu erbringen, betrachte man folgende Hilfsfunktion:

$$(12) \qquad \Phi(\zeta) = a_0 + a_1 \cdot P_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \zeta^2 + \ldots, \quad \text{wobei } \zeta = \varrho \cdot e^{i\psi}.$$

$\Phi(\zeta)$ ist eine ganze Funktion; denn sie wird durch nachstehende ganze Funktion majorisiert:

$$|a_0| + |a_1| \cdot P \cdot |\zeta| + |a_2| \cdot P^2 \cdot |\zeta|^2 + \ldots + |a_n| \cdot P^n \cdot |\zeta|^n \ldots$$

Nun fasse man für einen beliebigen, fest gewählten Wert von ϱ das Maximalglied der Reihe (12) ins Auge, dessen Zentralindex n sein möge. (Es soll zunächst $n \neq 0$ sein.) Daß das n-te Glied der Reihe (12) mindestens so groß als alle vorangehenden und größer als alle nachfolgenden Glieder ist, wird durch die folgenden Ungleichungen (13) ausgedrückt:

$$(13a) \qquad \frac{|a_{n-\mu} \cdot \varrho^{n-\mu}|}{|a_n \cdot \varrho^n|} \leqq P_{n-\mu+1} \ldots P_n \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

$$(13b) \qquad \left| \frac{a_{n+\nu} \cdot \varrho^{n+\nu}}{a_n \cdot \varrho^n} \right| < \frac{1}{P_{n+1} \ldots P_{n+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

[12]) Valiron, loc. cit. [5]), S. 225. I.

Setzt man $\varrho = \frac{r}{P_n}$, wodurch zu jedem Wert von ϱ eindeutig ein Wert r gehört, so erhält man:

$$\left|\frac{a_{n-\mu}\cdot r^{n-\mu}}{a_n\cdot r^n}\right| \leqq \frac{P_{n-\mu+1}\dots P_n}{P_n^{\mu}} \qquad (\mu = 1, \dots, n), \tag{14a}$$

$$\left|\frac{a_{n+\nu}\cdot r^{n+\nu}}{a_n\cdot r^n}\right| < \frac{P_n^{\nu}}{P_{n+1}\dots P_{n+\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \dots). \tag{14b}$$

n bedeutet in diesen Ungleichungen zunächst den Zentralindex der Funktion $\Phi(\zeta)$ für den gewählten Wert ϱ. Es ist aber evident, daß n ebenfalls den Zentralindex der Reihe (6) für den Wert $r = \varrho \cdot P_n$ bedeutet. Denn in den Ungleichungen (14) werden ja gerade die Verhältnisse von irgendeinem Gliede zum n-ten Gliede gebildet, und alle diese Verhältnisse sind kleiner als 1, wie man aus der rechten Seite dieser Ungleichungen ersieht. Damit wäre der Hilfssatz für $n \neq 0$ eingesehen. Sollte $n = 0$ sein, so hat man einfach $P_0 = 1$ zu setzen, und sämtliche Überlegungen bleiben gültig. Man bemerkt, daß die Folge der Vergleichsindizes identisch ist mit der Folge der Zentralindizes der Reihe (12). Diese selbst ist wieder eine Teilfolge der Folge, gebildet von den Zentralindizes der Reihe (6), oder mit ihr identisch. Man bemerkt ferner, daß für $r = \varrho \cdot P_n$ (13) aus (14) folgt; d. h.: das Beweisverfahren erfaßt sämtliche Vergleichswerte.

Der Beweis des Zusatzes ergibt sich ebenso einfach. Die Ungleichungen (14) werden bei wachsendem r richtig sein, solange die Ungleichungen (13) befriedigt sind, d. h. solange der Wert $n = n_k$ der Zentralindex der Reihe (12) ist. Zu jedem Wert des Zentralindex gehört aber nach den Ausführungen von § 3 ein bestimmtes Intervall $(\varrho_k, \varrho_{k+1})$. Also sind auch die Ungleichungen (14) in einem Intervall $s_k \leqq r < s_k'$ befriedigt. Die Werte von s_k resp. s_k' bestimmen sich aus folgenden Gleichungen:

$$s_k = \varrho_k \cdot P_n \quad = \varrho_k \cdot P_{n_k}, \tag{15a}$$

$$s_k' = \varrho_{k+1} \cdot P_n = \varrho_{k+1} \cdot P_{n_k}. \tag{15b}$$

Damit ist ganz allgemein das k-te Intervall $s_k \leqq r < s_k'$ bestimmt, dessen sämtliche r-Werte Vergleichswerte sind. Anfangs- und Endpunkt des $(k+1)$-ten Intervalles bestimmen sich entsprechend aus folgenden Gleichungen:

$$s_{k+1} = \varrho_{k+1} \cdot P_{n_{k+1}}, \tag{16a}$$

$$s_{k+1}' = \varrho_{k+2} \cdot P_{n_{k+1}}. \tag{16b}$$

Dabei bedeutet n_{k+1} den dem Wert n_k folgenden Zentralindex der Reihe (12). Indem man die Gleichungen (16a) und (15b) miteinander vergleicht, findet man:

$$\frac{s_{k+1}}{s'_k} = \frac{P_{n_{k+1}}}{P_{n_k}}.$$

Daraus erhält man:

$$\log \frac{s_2}{s'_1} + \log \frac{s_3}{s'_2} + \ldots = \log P - \log P_{n_1}.$$

n_1 ist der erste Wert, den der Zentralindex der Reihe (12) und also auch (6) annimmt. Er ist einfach der Index des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der Reihe (6). Damit ist auch der Zusatz bewiesen.

§ 5.

Abschätzung von $\mu(r)$.[13])

Für den Beweis des Satzes C sind § 5 und § 6 von keinem unmittelbaren Interesse. Um aber die Art der Anwendung der Ungleichungen (I) und (II) deutlich zu erkennen, wollen wir $\mu(r)$ abschätzen und eine Anwendung von der Abschätzung machen. Nach Formel (11) hat man:

$$\mu(r) = 1 + \sum_{\mu=1}^{n} \left| \frac{a_{n-\mu}}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{r^{\mu}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+\nu}}{a_n} \right| \cdot r^{\nu}.$$

Zudem wird vorausgesetzt, daß das n-te Glied Maximalglied ist. Wir wollen die Abschätzung nur für Vergleichswerte zu einer bestimmten P_n-Folge durchführen und finden:

$$(17) \qquad \mu(r) < 1 + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{P_{n-\mu+1} \ldots P_n}{P_n^{\mu}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{P_n^{\nu}}{P_{n+1} \ldots P_{n+\nu}}.$$

In diesem Schluß liegt die Wichtigkeit des Wimanschen Hilfssatzes. Denn man braucht nur eine geeignete P_n-Folge zu wählen, um das Ziel zu erreichen. Wir setzen z. B.:

$$(18) \qquad \log P_n = 1 + \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}, \quad \text{wobei } \alpha = 1 + \delta;$$

δ bedeutet eine feste positive Zahl, die speziell beliebig klein gewählt werden darf. Dann sind sämtliche Voraussetzungen, damit wir Ungleichungen (I) und (II) anwenden dürfen, für unsere P_n-Folge erfüllt.

---

[13]) Vgl. Wiman, loc. cit. [3]), S. 313, 314, 315.

Wir behaupten folgenden

Satz 1. *Bedeutet ε eine feste positive Größe, so gilt für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß:*

$$\mu(r) < [n(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{19}$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus nachstehender Rechnung. Wenn r ein Vergleichswert ist, erhält man laut Formel (17):

$$\mu(r) < 2 + \sum_{\mu=2}^{n} \frac{P_{n-\mu+1} \dots P_{n-1}}{P_n^{\mu-1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{P_n^{\nu}}{P_{n+1} \dots P_{n+\nu}}.$$

Weil wir nun die Folge (18) als P_n-Folge wählen, finden wir

$$\log \frac{P_{n-\mu+1} \dots P_{n-1}}{P_n^{\mu-1}} = -\sum_{k=1}^{\mu-1} (\mu-k) \cdot \left(\frac{1}{n-k}\right)^{\alpha} \leqq \frac{-\mu(\mu-1)}{2(n-1)^{\alpha}} < \frac{-\mu(\mu-1)}{2(n+\mu-1)^{\alpha}},$$

$$\log \frac{P_n^{\nu}}{P_{n+1} \dots P_{n+\nu}} = -\sum_{k=0}^{\nu-1} (\nu-k) \cdot \left(\frac{1}{n+k}\right)^{\alpha} \leqq \frac{-\nu(\nu+1)}{2(n+\nu-1)^{\alpha}} < \frac{-\nu^2}{2(n+\nu)^{\alpha}},$$

d. h.

$$\mu(r) < 2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} e^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2(n+\nu)^{\alpha}}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{-\nu^2}{2(n+\nu)^{\alpha}}},$$

$$\mu(r) < C \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{-\nu^2}{2(n+\nu)^{\alpha}}} < C \cdot \int_0^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2(n+x)^{\alpha}}} \cdot dx.$$

C (ebenso C' und C'') soll in dieser und auch in den folgenden Formeln eine Konstante bedeuten, die in jeder Formel einen endlichen positiven Wert besitzt, der aber in zwei verschiedenen Formeln verschieden sein kann. Man schließt weiter:

$$\mu(r) < C \cdot \left[\int_0^{n} e^{\frac{-x^2}{(2n)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{2}} \cdot dx + \int_n^{\infty} e^{\frac{-x^{2-\alpha}}{2^{1+\alpha}}} \cdot dx\right].$$

Die Wahl von α liegt noch in unserer Hand. Wenn $\alpha < 2$, so hat das zweite Integral keinen Einfluß auf die Größenordnung der rechten Seite, und es ergibt sich:

$$\mu(r) < C' \cdot \int_0^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2^{1+\alpha} n^{\alpha}}} dx = C'' \cdot [n(r)]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Indem man speziell $\alpha = 1 + 2\varepsilon'$ setzt, wobei ε' eine positive Größe $< \frac{1}{2}$ bedeutet, so folgt

$$\mu(r) < C'' \cdot n(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} < n(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Man bemerkt, daß für genügend großes r der Wert von ε beliebig klein sein kann, indem man ε' beliebig klein wählt, und damit ist Satz (1) bewiesen.

§ 6.

Eine Hadamardsche Ungleichung.

Von Ungleichung (19) können wir eine interessante Anwendung machen. Hadamard[14]) hat in seiner bekannten Arbeit über die ganzen Funktionen bewiesen, daß es eine unendliche Folge von Indizes n gibt, für die die Ungleichung

$$|w_1 \dots w_n \cdot a_n| \geqq \frac{1}{n+1}$$

besteht. Dabei bedeutet w_i die i-te Nullstelle der ganzen Funktion

$$F(z) = 1 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots$$

Wir sind in der Lage, diese Ungleichung etwas zu verschärfen. Nach der Jensenschen Ungleichung gilt

$$\frac{r^n}{|w_1 \dots w_n|} < M(r) \leqq |a_n| \cdot r^n \cdot \mu(r).$$

Indem man nur Vergleichswerte betrachtet, schließt man gemäß Ungleichung (19):

$$\frac{1}{|w_1 \dots w_n|} < |a_n| \, n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

oder

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} < |a_n w_1 \dots w_n|.$$

Aus unserem Beweise folgt nur, daß diese Ungleichung richtig ist für die Vergleichsindizes der Funktion $F(z)$ in bezug auf die Folge (18).

§ 7.

Eine Ungleichung zwischen $n(r)$ und $m(r)$.

Ebenso läßt sich mit Hilfe der Wimanschen Ungleichungen nachstehender Satz 2 beweisen[15]):

Satz 2. *Bedeutet ε eine feste positive Größe, so gilt für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß,*

$$n(r) < [\log m(r)]^{1+\varepsilon}. \tag{20}$$

Beweis. Ist r ein Vergleichswert, so gilt nach Ungleichung (I) für $\mu = n$

$$m(r) \geqq |a_0| \cdot \frac{P_n^n}{P_1 \dots P_n}.$$

---

[14]) Man findet die Ungleichung in etwas anderer Formulierung bei Hadamard: Étude sur les fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journal de Mathématiques 1893, S. 201.

[15]) Vgl. Wiman, loc. cit. [3]), S. 312, Ungleichung (25).

Wir setzen zunächst voraus, daß $a_0 \neq 0$. Sollte diese Bedingung nicht zutreffen, so läßt sich der Beweis leicht modifizieren. Indem man wieder als P_n-Folge die Folge (18) wählt, findet man:

$$\log \frac{m(r)}{|a_0|} \geqq \frac{1}{1} + \frac{2}{2^\alpha} + \ldots + \frac{n-1}{(n-1)^\alpha} \geqq \int_1^n x^{1-\alpha} \cdot dx,$$

$$\log \frac{m(r)}{|a_0|} \geqq \frac{n^{2-\alpha}}{2-\alpha} \cdot \left[1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right].$$

Indem man $\alpha = 1 + \varepsilon'$ setzt, wobei ε' eine positive Zahl < 1 bedeutet, erhält man:

$$n^{1-\varepsilon'} < C \cdot \log m(r), \quad \text{d. h.} \quad n(r) < [\log m(r)]^{1+\varepsilon}.$$

ε darf beliebig klein sein, man braucht nur die Größe ε' beliebig klein zu wählen.

Aus den Ungleichungen (10), (19), (20) schließt man sofort folgenden

Satz 3.[16]) *Bedeutet ε eine positive feste Größe, so gilt für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß:*

$$M(r) < m(r) \cdot [\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

§ 8.

Größenordnung der Reihe $\sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} \cdot z^{n+\nu}$.

Da wir die Größenordnung dieser Reihe im folgenden kennen müssen, wollen wir sie im Anschluß an § 5 berechnen. Man setzt zunächst

$$\left| \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} \cdot r^{n+\nu} \right| \leqq m(r) \cdot \bar{\mu}(r),$$

wobei

$$\bar{\mu}(r) = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \cdot \left| \frac{a_{n-\mu}}{a_n} \right| \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \cdot \left| \frac{a_{n+\nu}}{a_n} \right| \cdot r^\nu.$$

Indem man diese Abschätzung nur für Vergleichswerte der Folge (18) durchführt, gelingt es durch genau dieselbe Rechnung wie in § 5, die Bestimmung von $\bar{\mu}(r)$ auf die Berechnung des folgenden Integrals zu reduzieren:

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2}{n^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4n^\alpha}} \cdot dx = n^{\frac{3}{2}\alpha - 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

---

[16]) Zum Beweise dieser Ungleichung hat Wiman seine grundlegenden Untersuchungen zuerst verwendet.

Setzt man $\alpha = 1 + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon'$, so erhält man

$$\left| \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} \cdot z^{n+\nu} \right| < C \cdot m(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon'} < m(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

so daß folgender Satz gilt[17]):

Satz 4. *Bedeutet ε eine feste positive Größe, so gilt für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß:*

$$\left| \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} \cdot z^{n+\nu} \right| < m(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{21}$$

§ 9.

Nun sind wir in der Lage, einige Sätze über das Verhalten der ganzen transzendenten Funktionen aufzustellen, welche bei den ganzen rationalen Funktionen evident sind, wenn man beachtet, daß für sie von einem gewissen r an $n(r)$ gleich dem Grade ist.

Satz 5. *Es ist*

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z \cdot e^{i\lambda\pi/n(r)})}{F(z)} = e^{i \cdot \lambda \cdot \pi} \tag{22}$$

gleichmäßig in λ, wenn die reelle Zahl λ auf irgendein festes endliches Intervall eingeschränkt ist und z in folgender Auswahl von Werten ins Unendliche strebt:

1. *Der Betrag $|z| = r$ läßt eine gewisse Menge von endlichem logarithmischem Maß aus.*

2. *Gehört $|z| = r$ zu den beibehaltenen Werten, dann darf z nur Punkte eines Kreisbogens durchlaufen, in denen folgende Ungleichung befriedigt ist*

$$|F(z)| > M(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{4}+\delta};$$

dabei ist δ eine positive, feste Zahl im Intervall $0 < \delta < \frac{1}{4}$.[18])

Um Satz 5 gut zu verstehen, betrachte man die konforme Abbildung eines Kreisbogens $|z| = r$ in der Umgebung eines solchen Punktes, dessen z-Wert der durch obenstehendes Auswahlverfahren bestimmten Menge angehört. Einem solchen Kreisbogen vom Zentriwinkel $\frac{\lambda \cdot \pi}{n(r)}$ in der z-Ebene entspricht angenähert ein Kreisbogen vom Zentriwinkel $\lambda \cdot \pi$ in der w-Ebene ($w = F(z)$). Wenn wir also λ und auch r genügend groß wählen, wird sich diese Kurve beliebig viele Male um den Nullpunkt herumschlingen.

[17]) Vgl. Wiman, loc. cit. [4]), S. 10; Valiron, loc. cit. [5]), S. 226.

[18]) Dieser Satz wurde zum erstenmal von Wiman bewiesen. Vgl. Wiman, loc. cit. [4]) § 3 und Valiron, loc. cit. [5]) S. 228, 229 und besonders loc. cit. [6]) 1. Teil, wo nicht nur für die Punkte eines Kreisbogens, sondern für die Punkte eines *Gebietes* ein entsprechender Satz aufgestellt wird.

Daraus schließt man, daß eine ganze transzendente Funktion in der Nähe einer solchen Stelle z alle möglichen Argumente annimmt, also auch rein positive und negative Werte ohne wesentliche Änderung des absoluten Betrages. Weil die Gleichung (22) speziell für solche Stellen richtig ist, an denen $F(z)$ seinen maximalen absoluten Betrag annimmt, so folgt aus den zuletzt genannten Bemerkungen, daß für dieselbe Auswahl von r-Werten, für die Gleichung (22) gültig ist, auch die Gleichung besteht

$$\lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{A(r)} = 1. \tag{23}$$

$A(r)$ bedeutet in gewohnter Weise den maximalen Realteil von $F(z)$. Wird also die Stelle z_0 auf dem Kreise $|z| = r$ derart gewählt, daß $F(z_0)$ seinen maximalen Realteil annimmt, so muß $F(z_0)$ die Form annehmen

$$F(z_0) = A(r)\,(1 + i \cdot \eta(r)), \tag{24}$$

wobei $\lim_{r=\infty} \eta(r) = 0$, und r dabei natürlich dieselbe Auswahl wie bei Gleichung (22) zu durchlaufen hat.

Zum Beweise von Satz 5 geht man von der Identität aus

$$\frac{F(z \cdot e^{i\lambda\pi/n})}{F(z)} = e^{i\lambda\pi} \cdot \left[1 + i\lambda\pi \cdot \frac{g(z)}{F(z)} + \frac{F(z,\lambda)}{F(z)}\right], \tag{25}$$

wobei

$$g(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} \frac{\nu}{n} \cdot a_{n+\nu} \cdot z^{n+\nu} = \frac{z}{n} \cdot F'(z) - F(z), \tag{26}$$

$$F(z,\lambda) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot z^{n+\nu} \left[e^{i\lambda\pi\nu/n} - 1 - i \cdot \lambda \cdot \pi \cdot \nu/n\right]. \tag{27}$$

Die Richtigkeit dieser Identität ergibt sich aus den Gleichungen

$$F(z \cdot e^{i\lambda\pi/n}) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot z^{n+\nu} \cdot e^{i\lambda\pi} \cdot e^{i\lambda\pi\nu/n}$$

$$= e^{i\lambda\pi}\left[\sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot z^{n+\nu}\left(1 + \frac{i\lambda\pi\nu}{n} + e^{i\lambda\pi\nu/n} - 1 - \frac{i\lambda\pi\nu}{n}\right)\right].$$

Wir wollen die beiden Hilfsfunktionen $F(z,\lambda)$ und $g(z)$ abschätzen.

Abschätzung von $F(z,\lambda)$:

$$F(z,\lambda) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} \cdot z^{n+\nu}\left[e^{i\lambda\pi\nu/n} - 1 - \frac{i\lambda\pi\nu}{n}\right].$$

Man benutzt die Ungleichung[19])

$$\left|e^{i\lambda\pi\nu/n} - 1 - \frac{i\lambda\pi\nu}{n}\right| \leqq \frac{\lambda^2\pi^2\nu^2}{2n^2}. \tag{28}$$

[19]) Man kann allgemeiner durch vollständige Induktion (Integration) nachweisen, daß die Potenzreihe $1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \ldots$ folgende Eigenschaft besitzt: Ist x reell, $x \gtrless 0$, dann ist die Differenz der totalen Summe und irgendeiner Partialsumme dem Betrage nach kleiner als das erste vernachlässigte Glied.

Indem man die Abschätzung in gewohnter Weise auf die zur Folge (18) gehörigen Vergleichswerte beschränkt, kann man laut Ungleichung (21) schließen:

$$|F(z,\lambda)| < \sum_{\nu=-n}^{\infty} |a_{n+\nu}| \cdot r^{n+\nu} \cdot \frac{\lambda^2 \pi^2 \nu^2}{2n^2} < \frac{\lambda^2 \pi^2}{2} \cdot m(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Weil λ auf ein festes, endliches Intervall eingeschränkt ist und $m(r) < M(r)$, findet man schließlich:

$$|F(z,\lambda)| < C \cdot M(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{29}$$

Es sei jetzt $|\lambda| \leqq n(r)^{\frac{1-3\varepsilon}{4}}$, dann gilt folgende Ungleichung:

$$|F(z,\lambda)| < \frac{\pi^2}{2} \cdot M(r) \cdot n(r)^{-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{29'}$$

Hieraus folgt nun eine Abschätzung für $g(z)$. Nach (25) ist

$$g(z) = \frac{e^{-i\lambda\pi} F(z \cdot e^{i\lambda\pi/n}) - F(z) - F(z,\lambda)}{i\lambda\pi}.$$

Setzt man $\lambda = n(r)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}$, so erhält man infolge der Ungleichung (29')

$$|g(z)| < C \cdot M(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{30}$$

Man bemerkt, daß die Ungleichungen (29), (29'), (30) auf der ganzen Kreisperipherie $|z| = r$ für die betrachteten r-Werte gelten. Jetzt berücksichtigen wir, daß laut Voraussetzung $|F(z)| > M(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$ ist, und finden kraft (29)

$$\left|\frac{F(z,\lambda)}{F(z)}\right| < C \cdot n(r)^{-\frac{1}{4}+\varepsilon-\delta}$$

und nach Ungleichung (30)

$$\left|\frac{g(z)}{F(z)}\right| < C \cdot n(r)^{\frac{\varepsilon}{2}-\delta}.$$

D. h. wenn $\delta > \varepsilon$, so ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{F(z,\lambda)}{F(z)} = 0, \tag{31}$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{g(z)}{F(z)} = 0. \tag{32}$$

Satz 6. *Wenn man die Stellen z gemäß den Voraussetzungen von Satz 5 wählt, gilt*[20])

$$F'(z) = F(z) \cdot \frac{n(r)}{z} \cdot [1 + \eta(z)], \tag{33}$$

wobei $\lim_{r=\infty} \eta(z) = 0$.

[20]) Vgl. Valiron, loc. cit.[5]) S. 334.

Beweis. Nach Gleichung (26) hat man

$$F'(z) = (F(z) + g(z)) \cdot \frac{n(r)}{z}. \tag{34}$$

Für unsere Auswahl von z-Werten gilt aber Gleichung (32), und damit ist der Satz bewiesen.

Satz 7. *Der maximale absolute Betrag $M^1(r)$ der ersten Ableitung einer ganzen Funktion, erfüllt für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß, die Ungleichung*[21])

$$\frac{n(r)}{r} \cdot M(r) \cdot (1 - \varepsilon(r)) < M^1(r) < \frac{n(r)}{r} \cdot M(r) \cdot (1 + \varepsilon(r)), \tag{35}$$

wobei $\lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Beweis. Nach Satz 6 schließt man

$$M^1(r) > M(r) \cdot \frac{n(r)}{r} (1 - \varepsilon(r)).$$

Man erhält diese Ungleichung, indem man auf dem Kreise $|z| = r$ diejenige Stelle z wählt, wo $|F(z)| = M(r)$ ist, und dann Gleichung (33) berücksichtigt. Betrachtet man ebenso jene Stelle z, wo $|F'(z)| = M^1(r)$, so folgt aus Gleichung (34) und Ungleichung (30)

$$M^1(r) < (M(r) + C \cdot M(r) \cdot n(r)^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}) \cdot \frac{n(r)}{r}.$$

Damit ist Satz 7 bewiesen.

III. Beweis des Satzes C.

§ 10.

Nun sind wir in der Lage, Satz C zu beweisen[22]). Zunächst stellen wir folgendes fest: Die Funktion $p(z) \cdot e^{F_1(z)} + q(z) \cdot e^{F_2(z)}$ kann unter den gemachten Voraussetzungen nicht identisch verschwinden. Würde es der Fall sein, so müßte nach (2) auch gelten

$$r(z) \cdot F_1'(z) + s(z) \equiv 0. \tag{36}$$

Dies ist aber nicht möglich, weil nach Voraussetzung $\frac{s(z)}{r(z)}$ keine von Null verschiedene ganze Funktion ist und $F_1(z) - F_1(0)$ nicht identisch verschwindet. Deshalb ist die linke Seite von (36) eine von Null verschiedene ganze Funktion. (Sie kann in besonderen Fällen eine Konstante sein.)

---

[21]) Vgl. Wiman, loc. cit.[4]), § 5. Vgl. Valiron, loc. cit.[5]), S. 235, Théorème IV.

[22]) Vgl. Wiman, loc. cit.[4]), Beweis des Satzes von Picard, S. 21; Valiron, loc. cit.[5]), S. 232, 233.

Ebenso leicht zeigt man, daß $q(z) \not\equiv 0$. Wäre das Gegenteil der Fall, so müßte folgende Gleichung richtig sein:

$$p(z) \cdot e^{F_1(z)} + r(z) F_1'(z) + s(z) \equiv 0. \tag{37}$$

Indem man diese Gleichung speziell an solchen Stellen betrachtet, an denen $F_1(z)$ seinen maximalen Realteil annimmt, so folgt aus den Sätzen 5, 7 und 2 von § 9 sofort, daß es z-Werte gibt, in denen die linke Seite von (37) beliebig groß wird. Also ist (37) nicht möglich.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. $F_1(z)$ ist ein Polynom[23]). Der Grad dieses Polynoms sei n und der Koeffizient von z^n betrage c. Die Gleichung (2) nimmt dann folgende Form an:

$$q(z) \cdot e^{F_2(z)} = -p(z) \cdot e^{cz^n(1+\varepsilon_1(z))} + P(z), \tag{38}$$

wobei $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_1(z) = 0$ und $P(z)$ ein Polynom bedeutet.

Die rechte Seite von (38) besitzt an den Stellen maximalen Realteils des Polynoms $F_1(z) = cz^n(1+\varepsilon_1(z))$ den maximalen absoluten Betrag. In der Umgebung einer solchen Stelle läßt sich Gleichung (38) auf folgende Form bringen:

$$e^{F_2(z)} = e^{cz^n(1+\varepsilon_1^*(z))}, \tag{39}$$

wobei $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_1^*(z) = 0$. Damit auch die linke Seite von (38) an diesen Stellen den größten absoluten Betrag annimmt, müssen für großes r die Ungleichungen

$$r^{n-\varepsilon} < \Re(F_2(z)) < r^{n+\varepsilon}$$

gelten. ε bedeutet eine feste positive Zahl. Nach einem bekannten Satze von Hadamard muß also $F_2(z)$ ebenfalls ein Polynom vom n-ten Grade sein. Der Koeffizient von z^n betrage γ. (39) erhält dann folgende Form:

$$e^{\gamma z^n(1+\varepsilon_2(z))} = e^{cz^n(1+\varepsilon_1^*(z))},$$

wobei $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_2(r) = 0$, $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_1^*(r) = 0$. D. h.

$$\gamma = c.$$

Die Identität (2) läßt sich schließlich schreiben wie folgt:

$$p(z) \cdot e^{cz^n(1+\varepsilon_1(z))} + q(z) \cdot e^{cz^n(1+\varepsilon_2(z))} = P(z). \tag{40}$$

Wenn das Argument z so gewählt wird, daß cz^n negativ reell wird, ist die linke Seite von (40) bei genügend großem r beliebig klein. Dies kann aber nicht sein, weil auf der rechten Seite ein Polynom steht (evtl.

[23]) Dieser Fall könnte einfacher erledigt werden. Wir geben den Beweis trotzdem in der vorliegenden Form, weil er im allgemeinen Fall analog verläuft.

eine von Null verschiedene Konstante). Der absolute Betrag der rechten Seite von (40) strebt also gegen Unendlich (oder bleibt konstant).

2. $F_1(z)$ ist eine ganze transzendente Funktion. Wir führen folgende Bezeichnung ein: Mit $M_1(r)$ bezeichnen wir den maximalen absoluten Betrag, mit $A_1(r)$ den maximalen Realteil von $F_1(z)$ auf dem Kreise $|z| = r$. Analoge Bedeutung für die Funktion $F_2(z)$ haben $M_2(r)$, $A_2(r)$.

Wir wollen das gegenseitige Verhalten der Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ für den Fall, daß die Identität (2) besteht, diskutieren und zwar nur für eine bestimmte Auswahl von r-Werten. Wie die Auswahl zu treffen ist, wird im folgenden erklärt werden. Zunächst gelten für alle r-Werte, abgesehen von einer Menge von endlichem logarithmischem Maß, folgende Ungleichungen:

$$A_k(r) > M_k(r)\cdot(1-\varepsilon), \tag{41a}$$

$$|F_k'(r)| < \frac{n_k(r)\cdot M_k(r)}{r}\cdot(1+\varepsilon), \tag{41b}$$

$$n_k(r) < [\log M_k(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{41c}$$

wobei $k = 1, 2$, und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Zudem können wir die Auswahl der r-Werte so treffen, daß für sie Satz 5 von § 9 gleichzeitig für beide Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ gilt. Dieser Schluß ist eine einfache Folge des Valironschen Zusatzes zu den Wimanschen Ungleichungen, wie wir bereits in § 4 bemerkt haben. Alle folgenden Betrachtungen und Gleichungen gelten also nur für solche r-Werte, die zu unserer Auswahl gehören.

Die Größe $\eta(r)$ [auch mit Indizes] soll eine reelle Funktion von r bedeuten, deren absoluter Betrag beim Durchlaufen unserer Auswahl von r-Werten mit wachsendem r gegen Null strebt.

Wählt man auf einem Kreise $|z| = r$ die Stelle z_1 derart, daß $\Re(F_1(z_1)) = A_1(r)$, so erhält man infolge Ungleichungen (41a, b, c)

$$|q(z_1)|\cdot e^{\Re(F_2(z_1))} = e^{A_1(r)}\cdot(|p(z_1)| + \eta_1(r))$$

oder

$$\Re(F_2(z_1)) = M_1(r)\cdot(1+\eta_1^*(r)). \tag{42a}$$

Daraus findet man

$$M_2(r) \geqq A_2(r) \geqq M_1(r)\cdot(1+\eta_1^*(r)). \tag{42b}$$

In entsprechender Weise wählt man auf demselben Kreise $|z| = r$ die Stelle z_2, so daß $F_2(z_2) = A_2(r)$. Wenn man die obere Grenze für $F_1'(r)$ und die soeben erhaltene Ungleichung für $M_2(r)$ berücksichtigt, erhält man auch hier:

$$|p(z_2)|\cdot e^{\Re(F_1(z_2))} = e^{A_2(r)}(|q(z_2)| + \eta_2(r))$$

oder

$$\Re(F_1(z_2)) = M_2(r)(1+\eta_2^*(r)), \tag{43a}$$

$$M_1(r) \geqq A_1(r) \geqq M_2(r)\cdot(1+\eta_2^*(r)). \tag{43b}$$

Weil man in den Ungleichungen (41) die Größe ε beliebig klein wählen darf, schließt man aus Ungleichung (42b) und (43b) sofort: Es ist für den Fall des Bestehens der Identität (2)

$$\lim_{r=\infty} \frac{M_1(r)}{M_2(r)} = 1, \tag{44a}$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{A_1(r)}{A_2(r)} = 1. \tag{44b}$$

Natürlich hat auch bei dieser Limesbildung der Wert r nur unsere Auswahl zu durchlaufen.

Weil $\Re(F_1(z_1)) = A_1(r)$ ist, besitzt $F_1(z_1)$ nach Gleichung (24) die Form

$$F_1(z_1) = A_1(r)(1+i\cdot\eta_3(r)).$$

Aus Ungleichung (41a) und Gleichungen (44b), (42a) schließt man:

$$\Re(F_2(z_1)) = A_2(r)(1-\eta_1^{**}(r)).$$

Also gilt wieder gemäß (24)

$$F_2(z_1) = A_2(r)(1+i\cdot\eta_4(z_1)).$$

Man findet infolge (44b)

$$\lim_{r=\infty} \frac{F_1(z_1)}{F_2(z_1)} = 1. \tag{45}$$

Die Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ nehmen also auf jedem Kreise $|z| = r$, wobei r ein Wert unserer speziellen Auswahl ist, gleichzeitig angenähert ihren maximalen Realteil an und der Quotient $\frac{F_1(z_1)}{F_2(z_1)}$ strebt beim Durchlaufen dieser Menge gegen 1.

Daraus wollen wir schließen:

$$\lim_{r=\infty} \frac{n_2(r)}{n_1(r)} = 1. \tag{46}$$

Wir führen den Beweis dieser Gleichung indirekt, indem wir die Existenz einer ins Unendliche sich erstreckenden Folge unserer r-Menge annehmen, bei deren Durchlaufen die Größe $\frac{n_2(r)}{n_1(r)}$ einem anderen Grenzwert zustrebt als 1. Wir zeigen, daß dann ein Widerspruch entsteht. Wenn r diese Folge durchläuft, wollen wir das Zeichen „$\rightarrow$“ benutzen. Es soll also bestehen:

$$\frac{n_2(r)}{n_1(r)} \rightarrow k \qquad (k \neq 1). \tag{47}$$

k ist Null oder eine positive Zahl, die wir zunächst kleiner als 1 voraussetzen. In der Umgebung der Stelle z_1 maximalen Realteils von $F_1(z)$ und also auch von $F_2(z)$, verhalten sich beide Funktionen gemäß Satz 5 von § 9. D. h.:

a) $F_1(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1}) \to F_1(z_1) \cdot e^{i\lambda\pi}, \qquad \Re(F_1(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1})) \to A_1(r) \cdot \cos(\lambda\pi),$

b) $F_2(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1}) \to F_2(z_1) \cdot e^{i\lambda\pi\frac{n_2}{n_1}}, \quad \Re(F_2(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1})) \to A_2(r) \cdot \cos\left(\lambda\pi \cdot \frac{n_2}{n_1}\right).$

Wenn $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, kann man entsprechende Ungleichungen zu (42b) und (43b) aufstellen und schließen

$$\frac{\Re(F_1(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1}))}{\Re(F_2(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_1}))} \to 1.$$

Weil aber

$$\frac{A_1(r)}{A_2(r)} \to 1,$$

so müßte also

$$\frac{\cos(\lambda\pi)}{\cos\left(\lambda\pi \cdot \frac{n_2}{n_1}\right)} \to 1.$$

Diese Gleichung steht mit (47) in Widerspruch. Ganz analog zeigt man, daß k nicht größer als 1 sein kann, indem man $F_1(z_1 \cdot e^{i\lambda\pi/n_2})$ bildet.

Wählt man schließlich in (48) $\lambda = 1$ und setzt $z_1 \cdot e^{i\pi/n_1} = z_0$, so werden $F_1(z_0)$ und gemäß (46) auch $F_2(z_0)$ angenähert die negativen maximalen Realteile darstellen. Das kann nicht sein. Denn an einer solchen Stelle würde $p(z_0) \cdot e^{F_1(z_0)} + q(z_0) \cdot e^{F_2(z_0)}$ beliebig klein und $r(z_0) \cdot F_1'(z_0) + s(z_0)$ beliebig groß. Denn $F_1'(z)$ ist nun eine ganze transzendente Funktion und verhält sich an einer solchen Stelle gemäß Satz 6 von § 9, ist also für genügend großes r größer als $r^\varkappa$, wo $\varkappa$ irgendeine positive Zahl bedeutet. Damit ist Satz C bewiesen.

Zürich, 28. März 1922.

(Eingegangen am 12. Juni 1922.)

Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

M. Fekete in Budapest.

Einleitung.

In seiner gleichbetitelten interessanten Abhandlung (Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 377—402) hat Herr I. Schur u. a. gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen zu einem reellen Intervall J oder einem Kreis K mit reellem Mittelpunkt bei vorgeschriebenem ganzzahligen positiven a_0 nur endlich viele Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante gehören, deren Wurzeln sämtlich in J bzw. K enthalten sind.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist, Kriterien für die Endlichkeit der Anzahl von Gleichungen der Schar (1) aufzustellen, bei denen sämtliche Wurzeln einer *allgemeinen* unendlichen, beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge angehören.

Herr Schur gründet seine Untersuchungen auf die Auswertung des größten Wertes M_n, welchen der absolute Betrag der Diskriminante

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2 \qquad (n \geqq 2)$$

der n Größen x_ν annehmen kann, falls dieselben auf ein Intervall (oder einen Kreis) beschränkt sind.

Die Grundlage unserer Entwicklungen bildet der Umstand, daß der Maximalwert von $|\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ auch im Falle einer beliebig gegebenen unendlichen, abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge E vorhanden ist und sein Verhalten bei wachsendem n auch dann zu verfolgen ist, wenn seine

Auswertung für feste Werte von n wegen der Allgemeinheit der Menge E auf Schwierigkeiten stößt. In der Tat, ist $M_n = M_n(E)$ der größte Wert, dessen $|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ für zur Menge gehörigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fähig ist, *so bilden die Größen* $\sqrt[2\cdot 1]{M_2}$, $\sqrt[3\cdot 2]{M_3}$, $\ldots$, $\sqrt[n(n-1)]{M_n}$, $\ldots$ *eine monoton abnehmende Folge und also existiert* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n(n-1)]{M_n} = M = M(E)$ (vgl. § 1, Satz I*).

Bevor wir diese, auf einfachstem Wege beweisbare Tatsache zu dem oben festgelegten Zwecke anwenden, stellen wir ihr im § 2 einen einfachen Satz zur Seite, über die Maximalwerte m_n der absoluten Beträge der zu E gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $t_n(x)$ (Satz II), um nachher im folgenden Paragraphen einen für uns wichtigen Zusammenhang zwischen den — von uns auch geometrisch interpretierten — Größen $\sqrt[n(n-1)]{M_n} = d_n$ und $\sqrt[n]{m_n} = \varrho_n$ herzuleiten, der in der einfachen Formel $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \varrho_n$ seinen Ausdruck findet (Satz III). Im Schlußparagraphen des vorbereitenden I. Teiles führt uns dieser Zusammenhang in Verbindung mit gewissen Ergebnissen der Herren Faber und Szegö zur Auswertung von $\lim d_n$ in einem bemerkenswerten speziellen Falle, nämlich in dem Fall, wo die Komplementärmenge von E einen einfach zusammenhängenden Bereich bildet (Satz IX).

Nach allen diesen Vorbereitungen befassen wir uns im II. Teile mit der Frage nach der Anzahl aller ganzzahligen Gleichungen, deren sämtliche Wurzeln einfach sind und einer gegebenen Punktmenge von der charakterisierten Art angehören. Zuerst betrachten wir Gleichungen der Form (1) mit festem höchsten Koeffizienten a_0 und beweisen den Satz, daß *unter denselben nur endlich viele vorkommen können, deren Wurzeln in eine Punktmenge von „transfinitem Durchmesser“* < 1 *fallen, d. h. in eine Menge, für welche* $\lim_{n\to\infty} d_n < 1$ *ist* (vgl. § 5, Satz X).

Nach etlichen Verschärfungen und Ergänzungen dieses Satzes gehen wir im § 6 (ähnlich wie das Herr Schur in den von ihm behandelten speziellen Fällen getan hat) zu Gleichungen (1) mit höchstem Koeffizienten $a_0 \leqq \alpha\beta^n$ $(\alpha > 0, \beta > 1)$ über, d. i. zu Gleichungen, bei denen dieser Koeffizient mit dem Gleichungsgrade nach Art einer geometrischen Progression wachsen kann und stellen wieder hinreichende Bedingungen für die Endlichkeit der Anzahl der Gleichungen namentlich mit Hilfe des transfiniten Durchmessers von E und der für das Anwachsen von a_0 maßgebenden Größe β auf (Satz XII). Die gewonnenen Ergebnisse werden in demselben Paragraphen auf Punktmengen E angewendet, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich bildet (Satz XIII).

Bisher bedienten wir uns der „*Diskriminantenmethode*“ des Herrn Schur. Im Schlußparagraphen 7 greifen wir unser Problem mit einer neuen Methode an, welche Verfasser mit seinem verstorbenen Freunde Franz Lukács schon früher für den speziellen Fall eines reellen Intervalles ausgebildet hat. Mit dieser „*Resultantenmethode*“ gewinnen wir die bisherigen Ergebnisse von neuem und beleuchten sie von neuer Seite. Um die Anwendung der fraglichen Methode zu ermöglichen, stellen wir die an und für sich interessante Tatsache fest, daß *in jeder beschränkten, abgeschlossenen, in bezug auf die reelle Achse symmetrischen ebenen Punktmenge von einem transfiniten Durchmesser* < 1 *die Null durch ganzzahlige Polynome beliebig fein approximiert werden kann* (Satz XIV).

I. Teil.

Geometrische Charakteristiken für ebene Punktmengen.

§ 1.

Über die Folge der Durchmesser bei einer beschränkten und abgeschlossenen unendlichen Punktmenge.

Es sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene und es sei $V_n = V_n(E)$ der größte Wert, den der absolute Betrag der Vandermondeschen Determinante

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_\nu^{n-1}, x_\nu^{n-2}, \ldots, x_\nu, 1| = \prod_{\substack{1 \\ \varkappa<\lambda}}^{n}(x_\varkappa - x_\lambda) \quad (n \geqq 2)$$

der n Größen x_ν annehmen kann, wenn dieselben voneinander unabhängig sämtliche Punkte von E durchlaufen.

Man betrachte die positiven Zahlen

$$d_n = \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n} \tag{2}$$

für $n = 2, 3, \ldots$. Ist $n = 2$, so bedeutet d_n die größte Sehne von E, eine Strecke, die üblicherweise als der Durchmesser von E bezeichnet wird; für $n \geqq 3$ bedeutet d_n das Maximum der geometrischen Mittelwerte, die aus sämtlichen Seiten irgendeines in E enthaltenen vollständigen n-Ecks gebildet sind; aus diesem Grunde sollen die Größen d_n auch für $n \geqq 3$ als Durchmesser der Menge E bezeichnet werden.

Wir wollen eine interessante Eigenschaft dieser Durchmesser in folgendem Satze formulieren:

I. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche, sonst beliebige ebene Punktmenge. Dann können ihre Durchmesser d_n bei wachsendem n niemals zunehmen.*

Zum Beweise sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ ein Punktsystem aus E, für welches $|V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})|$ ihren größten Wert annimmt, also

$$|V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})| = V_{n+1}$$

ist. Aus der Gleichung

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})$$
$$= (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) \ldots (\xi_1 - \xi_n)(\xi_1 - \xi_{n+1}) V(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n+1})$$

folgt nach der Definition der Größen ξ_k, V_n, V_{n+1} die Beziehung:

$$V_{n+1} \leqq |\xi_1 - \xi_2| \cdot |\xi_1 - \xi_3| \ldots |\xi_1 - \xi_{n+1}| \cdot V_n$$

und ähnlich kann man die weiteren Beziehungen:

$$V_{n+1} \leqq |\xi_2 - \xi_1| \cdot |\xi_2 - \xi_3| \ldots |\xi_2 - \xi_n| \cdot |\xi_2 - \xi_{n+1}| \cdot V_n,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$V_{n+1} \leqq |\xi_{n+1} - \xi_1| \cdot |\xi_{n+1} - \xi_2| \ldots |\xi_{n+1} - \xi_n| \cdot V_n$$

herleiten.

Nun folgt aus denselben durch Multiplikation

$$V_{n+1}^{n+1} \leqq V_n^{n+1} \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n+1} |\xi_\varkappa - \xi_\lambda|^2 = V_n^{n+1} V_{n+1}^2$$

und folglich ist

$$V_{n+1}^{n-1} \leqq V_n^{n+1}, \tag{3}$$

also besteht die Beziehung

$$\sqrt[\binom{n+1}{2}]{V_{n+1}} \leqq \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n},$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Aus der eben bewiesenen Monotonie der Zahlen d_n folgt die bemerkenswerte Tatsache, daß *diese Zahlen bei unendlich wachsendem n einem Grenzwerte zustreben.* Wir bezeichnen diesen Grenzwert als den *transfiniten Durchmesser* von E.

Der späteren Anwendungen halber wollen wir den Satz I und die hinzugefügte Bemerkung auch folgendermaßen aussprechen:

I*. *Sei E irgendeine beschränkte und abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge.* M_n *bedeute den größten Wert, dessen der absolute Betrag von der Diskriminante*

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2$$

der n Größen x_ν *fähig ist, falls dieselben in E beliebig variieren. Dann bilden die positiven Zahlen*

$$\sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

eine Folge, deren Glieder bei wachsendem n niemals zunehmen und also einem endlichen, nichtnegativen Grenzwerte zustreben.

§ 2.

Über die Lemniskaten von kleinsten mittleren Radien, welche eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge überdecken.

Es sei E wiederum eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge in der x-Ebene und

$$t_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$$

sei das zur E gehörige Tschebyscheffsche Polynom[1]) n-ten Grades, d. h. dasjenige Polynom, für welches das Maximum des absoluten Betrages auf E kleiner ausfällt, als für irgendein anderes Polynom mit demselben höchsten Gliede[2]). Wir wollen zunächst die Minimumeigenschaft, die dem Polynome $t_n(x)$ laut seiner Definition zukommt, geometrisch interpretieren: Sei $p(x)$ irgendein Polynom von der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und m der größte Wert, dessen der absolute Betrag von $p(x)$ auf E fähig ist; dann bildet die Gesamtheit aller Punkte x, für welche die Beziehung

$$|p(x)| \leqq m \tag{4}$$

stattfindet, eine „Lemniskatenfläche", die die Menge E „überdeckt". Die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von $p(x)$ sind die *foci* der Lemniskatenlinie

$$|p(x)| = m, \tag{5}$$

welche den Rand dieser Fläche (4) bildet und die Abstände $|x - x_1|$, $|x - x_2|, \ldots, |x - x_n|$ bilden die *radii vectores*, welche zum Punkte x der Lemniskate (5) gehören. Den geometrischen Mittelwert dieser Radien, d. h. die n-te Wurzel von m wollen wir als den mittleren Radius der Lemniskate (5) bezeichnen. Nun sei $m_n = m_n(E)$ der größte Wert von $|t_n(x)|$ auf E. Dann läßt sich die Minimaleigenschaft von $t_n(x)$ geometrisch so aussprechen:

Die Lemniskate

$$|t_n(x)| = m_n \tag{6}$$

besitzt den kleinsten mittleren Radius unter sämtlichen Lemniskaten,

[1]) Kurz T-Polynom.

[2]) Existenz und Unität dieses Polynoms $t_n(x)$ folgt für allgemeine Punktmengen der charakterisierten Art aus gewissen Sätzen von Herrn de la Vallée-Poussin. Vgl. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe. [Bull. de l'Acad. r. de Belgique **3** (1911), S. 199–211.]

elche die Menge E überdeckende Lemniskatenflächen von der Form (4) mgrenzen.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ er Überdeckungslemniskaten (6) sei im folgenden Satze formuliert:

II. *Es sei E eine beliebige beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene; $t_n(x)$ bedeute das zu E gehörige T-Polynom n-ten Grades und m_n sei der größte Wert von $|t_n(x)|$ auf E. Dann konvergieren die mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ der Überdeckungslemniskaten (6) bei unendlich wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert.*

Zum Beweise setzen wir

$$\liminf_{n\to\infty} \varrho_n = \alpha, \qquad \limsup_{n\to\infty} \varrho_n = \beta;$$

a offenbar $\alpha \leqq \beta < \infty$ ist, so genügt es zu zeigen, daß $\beta \leqq \alpha$ ist. Sei ε rgendeine positive Größe; dann existiert ein solches $n = n(\varepsilon)$, für welches

$$n \geqq 2 \quad \text{und} \quad \varrho_n < \alpha + \varepsilon,$$

lso überall auf E

$$|t_n(x)| < (\alpha + \varepsilon)^n$$

esteht. Ist nun k irgendeine positive ganze Zahl und l eine ganze ahl $\geqq 1$, $\leqq n-1$, so besteht ebenda auch die Ungleichheit

$$|t_n(x)^k \cdot x^l| < K(\alpha + \varepsilon)^{nk+l},$$

obei K bei vorausbestimmtem ε nur von der Ausdehnung der beschränkten Menge E abhängt; daher ist für $k = 1, 2, \ldots$; $1 \leqq l \leqq n-1$

$$m_{nk+l} < K(\alpha + \varepsilon)^{nk+l},$$

$$\varrho_{nk+l} < K^{\frac{1}{nk+l}}(\alpha + \varepsilon)$$

nd folglich

$$\limsup_{\nu\to\infty} \varrho_\nu \leqq \alpha + \varepsilon,$$

. h.

$$\beta \leqq \alpha + \varepsilon.$$

Daraus folgt aber $\beta \leqq \alpha$ und somit die Richtigkeit des Satzes II[3]).

---

[3]) Im Spezialfalle, wo E aus sämtlichen Punkten einer Lemniskatenlinie $|x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k| = \varrho^k$ von mittlerem Radius ϱ besteht, konvergieren die mittleren adien ϱ_n der zugehörigen Überdeckungslemniskaten für $n \to \infty$ gegen ϱ; das folgt us dem leicht beweisbaren Umstande, daß im genannten Falle die T-Polynome k-ten Grades mit der ν-ten Potenz von $x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k$ zusammenallen müssen. Vgl. auch VII. (Satz von Faber).

§ 3.

Über den Zusammenhang zwischen den Grenzwerten, denen die Folgen $\{d_n\}$ und $\{\varrho_n\}$ zustreben.

Wir haben in den beiden ersten Paragraphen für beschränkt-abgeschlossene unendliche Punktmengen zwei Folgen von geometrischen Charakteristiken dieser Mengen definiert: die der Durchmesser und die der kleinsten mittleren Radien der Überdeckungslemniskaten. Wir haben auch gezeigt, daß, wie auch diese Punktmengen sonst beschaffen seien, beide der genannten Folgen konvergieren. Da nun in dem folgenden alles darauf hinausläuft, zu entscheiden, welchem Grenzwerte diese Folgen zustreben, ist es für uns von besonderer Wichtigkeit, festzustellen, ob und welcher Zusammenhang zwischen beiden fraglichen Grenzwerten, bei Zugrundelegung einer und derselben Punktmenge, besteht.

Nun führt eine einfache Analyse zum folgenden, ganz allgemeinen Ergebnisse:

III. *Es sei E eine beliebige beschränkt-abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge und*

$$d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$$

sei die Folge der zu E gehörigen Durchmesser, des weiteren

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

die Folge der kleinsten mittleren Radien der Überdeckungslemniskaten von E. Dann konvergieren bei wachsendem n beide Folgen gegen denselben Grenzwert[4]).

Zur Begründung des Satzes III brauchen wir zwei Hilfssätze über die früher definierten Größen $V_n = V_n(E)$ und $m_n = m_n(E)$. Diese lauten wie folgt:

IV. *Ist E eine Punktmenge wie in* III, *so besteht die Beziehung*

$$m_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n} \qquad (n \geqq 2).$$

[4]) Die Verknüpfung dieses Satzes und der Behauptung in der Fußnote [3]) führt zum Resultate, daß *der mittlere Radius einer beliebigen Lemniskatenlinie dem „transfiniten Durchmesser" derselben gleich ist.* Aus diesem Umstande folgen die beiden Tatsachen: 1. die in § 2 betrachteten Überdeckungslemniskaten $|t_n(x)| = m_n$ sind auch durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihr transfiniter Durchmesser kleiner ausfällt als der irgendeiner anderen Überdeckungslemniskate mit n focis; 2. Satz III läßt sich auch so interpretieren, daß die Punktmengen $|t_n(x)| \leqq m_n$ die Menge E in solcher Weise überdecken, daß zugleich die Folge ihrer transfiniten Durchmesser gegen den transfiniten Durchmesser der überdeckten Menge E konvergiert.

V. *Ist E eine Punktmenge wie in* III, *so gilt die Relation*

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \leqq (n+1)\, m_n \qquad (n \geqq 2).$$

Um den Hilfssatz IV zu beweisen, sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ein Punktsystem aus E, für welches der absolute Betrag der Vandermondeschen Determinante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ihren Maximalwert $V_n = V_n(E)$ annimmt. Weiter sei ξ_0 ein solcher Punkt von E, in welchem

$$|(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)|$$

möglichst groß ausfällt. Dann ist

$$|\xi_0-\xi_1|\cdot|\xi_0-\xi_2|\ldots|\xi_0-\xi_n| = \left|\frac{V(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{V(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right| = \frac{V(\xi_0,\ldots,\xi_n)}{V_n}.$$

Nun ist aber das Produkt links $\geqq m_n = \underset{(E)}{\mathrm{Max}}\,|t_n(x)|$, der Zähler des rechtsstehenden Bruches jedoch $\leqq \underset{(E)}{\mathrm{Max}}\,|V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})| = V_{n+1}$, also

$$m_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n},$$

w. z. b. w.[5]).

Den Beweis von V gründen wir auf die Identität:

(7) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = |x_\nu^n, x_\nu^{n-1}, \ldots, x_\nu, 1| \equiv |t_n(x_\nu), x_\nu^{n-1}, \ldots, x_\nu, 1|$.

Ist nämlich $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}$ ein Punktsystem von E, für welches

$$|V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1})| = V_{n+1}$$

besteht, so folgt aus (7), daß

$$V_{n+1} \leqq |t_n(\eta_1)|\cdot|V(\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1})| + |t_n(\eta_2)|\cdot|V(\eta_1, \eta_3, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1})| + \ldots + |t_n(\eta_{n+1})|\cdot|V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

also

$$V_{n+1} \leqq (n+1)\, m_n V_n$$

ist[6]). W. z. b. w.

---

[5]) Wir haben hier die Beziehung $\mu_n < \frac{V_{n+1}}{V_n}$ mitbewiesen, wobei μ_n das Maximum des absoluten Betrages des zu E gehörigen n-ten T-Polynoms „in engerem Sinne" auf E bezeichnet, d. i. eines Polynoms der Polynomschar von der Gestalt $x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$ *mit lauter in E liegenden Wurzeln*, für welches das Maximum des absoluten Betrages auf E möglichst klein ausfällt. Offenbar ist $\mu_n \geqq m_n$.

[6]) Diese Relation, vereint mit der Beziehung $\mu_n \leqq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ [vgl. Fußnote [4])], führt zum interessanten Ergebnis: $\mu_n \leqq (n+1)\, m_n$.

Nunmehr, um aus IV und V zu III zu gelangen, leiten wir aus diesen beiden Hilfssätzen mit Hinsicht auf

$$V_2 \leqq 2\, m_1$$

die Beziehung[7])

$$(8) \qquad m_1 m_2 \dots m_{n-1} m_n \leqq V_{n+1} \leqq (n+1)!\, m_1 m_2 \dots m_{n-1} m_n$$

ab. Daraus folgt auf Grund der Definition von ϱ_n, d_n die Ungleichheit

$$\varrho_1^1 \varrho_2^2 \varrho_3^3 \dots \varrho_{n-1}^{n-1} \varrho_n^n \leqq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqq (n+1)!\, \varrho_1^1 \varrho_2^2 \varrho_3^3 \dots \varrho_{n-1}^{n-1} \varrho_n^n$$

und daher

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \dots \varrho_n^n} \leqq d_{n+1} \leqq \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{(n+1)!}\ \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \dots \varrho_n^n}.$$

Nun konvergiert offenbar bei wachsendem n mit ϱ_n zugleich auch der Mittelwert $\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\varrho_1^1 \varrho_2^2 \dots \varrho_n^n}$ gegen einen Grenzwert und zwar gegen denselben, wie ϱ_n. Mit Hinsicht auf die Stirlingsche Formel folgt also aus (8)

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = \lim_{n\to\infty} d_n.$$

Damit ist auch III bewiesen[8]).

Als eine Ergänzung zu III, IV und V wollen wir noch folgende, auch an sich interessante Tatsache zeigen:

VI. *Haben E, ϱ_n, d_n die Bedeutung wie oben, so besteht die Ungleichheit*

$$\varrho_n \leqq d_{n+1}.$$

Nach IV ist nämlich

$$\varrho_n \leqq \sqrt[n]{\frac{V_{n+1}}{V_n}} = \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{V_{n+1}^{\frac{n+1}{2}}}{V_n^{\frac{n+1}{2}}}};$$

nach (3) ist

$$V_{n+1}^{n-1} \leqq V_n^{n+1}.$$

---

[7]) Ich verdanke Herrn Szegö die folgende Bemerkung: Der zweite Teil der Ungleichung (8) kann verschärft werden; die Identität $V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \equiv \pm |\, t_n(x_\nu), t_{n-1}(x_\nu), \dots, t_1(x_\nu), 1\,|$ führt nämlich – mit Hinzunahme des Hadamardschen Determinantensatzes – zur Beziehung: $V_{n+1} \leqq (n+1)^{\frac{n+1}{2}}\, m_1 m_2 \dots m_{n-1} m_n$.

[8]) Aus den beiden Beziehungen $m_n \leqq \mu_n \leqq (n+1)\, m_n$ [vgl. Fußnote [5]) und [6])] folgt, daß auch $\lim \sqrt[n]{\mu_n} = \lim \varrho_n = \lim d_n$ ist.

Aus diesen beiden Beziehungen folgt

$$\varrho_n \leqq \sqrt[2]{V_{n+1}} = d_{n+1},$$

w. z. b. w.

§ 4.

Die Bestimmung des Grenzwertes der Durchmesserfolge in einem wichtigen Spezialfalle.

Wir wollen im vorliegenden Paragraphen den Grenzwert der zur Menge E gehörigen Durchmesserfolge in dem wichtigen Spezialfalle bestimmen, wo E eine solche beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene ist, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden (den Punkt $x = \infty$ enthaltenden) Bereich B bildet. Es gibt dann nach einem grundlegenden Satze der Theorie der konformen Abbildung eine Funktion $z = \psi(x)$, welche den Bereich B schlicht auf das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene abbildet, während die Punkte $x = \infty$ und $z = \infty$ einander entsprechen. Die inverse Funktion $x = \varphi(z)$ dieser Funktion $z = \psi(x)$ hat die folgende Form:

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \frac{\tau_2}{z^2} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots,$$

wobei $\tau \neq 0$ ist. Nun ist der absolute Betrag des „Abbildungsmoduls“ τ *gleich dem Grenzwert der zu E gehörigen Durchmesserfolge.* Das folgern wir auf Grund unseres Satzes III aus den beiden nachstehenden Hilfssätzen:

VII. (Satz von Faber[9]). *Es sei C eine geschlossene analytische Kurve in der komplexen x-Ebene und $T_n(x)$ das zugehörige T-Polynom n-ten Grades; ferner sei der Maximalwert von $|T_n(x)|$ auf C:*

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |T_n(x)| = M_n.$$

Ist $x = \Phi(z) = cz + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots$ $(c \neq 0)$ eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf das Äußere der Kurve C abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $x = \infty$ einander entsprechen, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{|c|^n} = 1.$$

VIII. (Satz von Faber[10]). *Es habe C, sowie auch $T_n(x)$, M_n, $\Phi(z)$*

[9]) G. Faber: Über Tschebyscheffsche Polynome [Journal für Math. **150** (1919), S. 79–106], S. 86. Vgl. auch Faber, Potentialtheorie und konforme Abbildung [Sitzungsber. der math.-phys. Kl. der bay. Akad. d. Wiss. 1920, S. 49–64].

[10]) A. a. O.

und c dieselbe Bedeutung, wie im Satze VII. *Dann besteht die Relation*

$$M_n \geqq |c|^n. \text{ [11]}$$

Ist nämlich $t_n(x)$ das zur Menge E gehörige n-te T-Polynom und m_n das Maximum von $|t_n(x)|$ in E, so kann für die mittleren Radien $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ der Überdeckungslemniskaten $|t_n(x)| = m_n$ aus VII bzw. VIII die Beziehung

(A) $$\lim_{n\to\infty} \varrho_n \leqq |\tau|,$$

bzw. die Ungleichheit

(B) $$\varrho_n \geqq |\tau| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

hergeleitet werden; aus diesen beiden Beziehungen folgt aber die mit unserer Behauptung nach III äquivalente Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = |\tau|$$

unmittelbar.

Wir beweisen zunächst den Grenzwertsatz (A):

Sei $R > 1$ und bedeute C_R diejenige geschlossene und doppelpunktlose analytische Kurve der x-Ebene, in welche die durch $x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots$ geleistete Abbildung den Kreis $|z| = R$ überführt. Dann ist

$$x = \Phi_R(z) = \tau R z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{Rz} + \frac{\tau_2}{R^2 z^2} + \ldots$$

eine Funktion, welche das Kreisäußere $|z| > 1$ auf das Äußere von C_R schlicht abbildet. Wendet man den Satz VII auf die Kurve C_R an, so gelangt man zur Relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(R)}{|\tau R^n|} = 1,$$

wobei $M_n(R)$ das Maximum des absoluten Betrages des zum Kreisbilde C_R gehörigen T-Polynoms von n-tem Grade auf C_R angibt. Aus dieser Gleichung folgt a fortiori

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n(R)} = |\tau| \cdot R.$$

Nun ist aber offenbar $M_n(R) \geqq m_n$, da E im Innern von C_R liegt; also ist

$$\lim \sqrt[n]{m_n} \leqq |\tau| \cdot R,$$

wie auch $R > 1$ gewählt sei. Man hat danach

$$\lim \sqrt[n]{m_n} \leqq |\tau|. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Nunmehr gehen wir zum Beweise von (B) über.

[11]) Vgl. auch G. Szegö: Über orthogonale Polynome usw. Math. Zeitschrift 9 (1921), S. 254.

Es habe R, C_R, $\Phi_R(z)$, $M_n(R)$ dieselbe Bedeutung wie oben. Dann gilt nach VIII die Beziehung

$$M_n(R) \geqq |\tau R|^n;$$

es ist aber offenbar

$$\operatorname*{Max}_{(C_R)} |t_n(x)| \geqq M_n(R),$$

also besteht die Ungleichung

$$\operatorname*{Max}_{(C_R)} |t_n(x)| \geqq |\tau R|^n.$$

Wir haben bisher bewiesen: Wie auch $R > 1$ gewählt sei, kann man auf dem Kreisbilde C_R einen solchen Punkt $x(R)$ festsetzen, wo das zur Menge E gehörige T-Polynom n-ten Grades dem absoluten Betrage nach $> |\tau|^n$ ist. Nun sei $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$ eine unendliche, monoton abnehmende, gegen Eins konvergierende Folge, für welche der Grenzwert

$$\lim_{\nu \to \infty} x(R_\nu)$$

vorhanden ist; man bezeichne diesen Grenzwert mit ξ. (Die Existenz einer solchen Folge ergibt sich aus dem Umstande, daß die Menge aller Zahlen $x(R)$ für $1 < R < R_0$ beschränkt ist.)

Wir behaupten, ξ gehört zur Menge E. Im entgegengesetzten Falle würde nämlich für $\zeta = \psi(\xi)$ die Ungleichung $|\zeta| > 1$ gelten, also häuften sich die Bildpunkte $z_\nu = \psi[x(R_\nu)]$ der Punkte $x(R_\nu)$ um einen Grenzpunkt außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$, obgleich die Größen $|z_\nu| = R_\nu$ — nach Voraussetzung — gegen Eins konvergieren. Nun ist aber ξ ein solcher Punkt, in dessen beliebiger Nähe Punkte existieren, wo $|t_n(x)| > |\tau|^n$ ist; daher ist $|t_n(\xi)| \geqq |\tau|^n$ und somit die Ungleichung

(B) $$\varrho_n \geqq |\tau|$$

bewiesen.

Auf Grund von (A), (B) und III können wir den folgenden Satz[12]) aussprechen:

IX. *Es sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich B bildet. Ist*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots$$

eine Funktion, welche das Äußere des Einheitskreises $|z| = 1$ schlicht

[12]) Herr Szegö hat ihn dem Verf. (in speziellerer Form) als eine Vermutung mitgeteilt und auch potentialtheoretisch interpretiert; auch die im Texte befindliche allgemeine Form des Satzes ist seiner Anregung zu verdanken.

auf den Bereich B abbildet, während die Punkte $z=\infty$ und $x=\infty$ einander entsprechen, so konvergieren die zu E gehörigen Durchmesser d_n bei unendlich wachsendem n gegen $|\tau|$.

II. Teil.

Über die Anzahl aller ganzzahliger Gleichungen, deren Wurzeln einer gegebenen Punktmenge angehören.

§ 5.

Gleichungen mit festem höchsten Koeffizienten.

Es sei E eine unendliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene. Wir stellen uns die Frage, *wie viele Gleichungen*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0) \tag{1}$$

mit lauter ganzen rationalen Koeffizienten und mit demselben höchsten Koeffizienten a_0 existieren, deren sämtliche Wurzeln einfach sind und der Menge E angehören?

Es ist zunächst klar, daß bei vorgeschriebenem Grade n nur endlich viele voneinander verschiedene Gleichungen (1) (eventuell keine) existieren können, welche den in der Fragestellung angegebenen Voraussetzungen entsprechen. Hat nämlich eine solche Gleichung ihre sämtlichen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in E und ist diese Menge in einem Kreise $|x| = \varrho$ enthalten (die Existenz eines solchen Kreises folgt aus der Beschränktheit von E), so ist

$$|a_\nu| = a_0 |\Sigma x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu}| \leqq \binom{n}{\nu} a_0 \varrho^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

also unterhalb einer allein von a_0, ϱ und n abhängenden Schranke gelegen. Daher kommen für die ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nur endlich viele Wertsysteme in Betracht. Nun folgt aus dem eben Gesagten, daß unendlich viele Gleichungen (1) mit lauter einfachen und in E liegenden Wurzeln nur dann existieren können, falls deren Grad unbegrenzt wächst. Aus diesem Umstande kann man leicht in bezug auf den Grenzwert des zu E gehörigen Durchmesser d_n folgendes schließen:

X. *Ist E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche ebene Punktmenge, so können unendlich viele Gleichungen der Form (1) mit ganzen rationalen und demselben ersten Koeffizienten a_0 und mit lauter einfachen, in E fallenden Wurzeln nur dann existieren, falls die Durchmesser d_n von E gegen einen Grenzwert $\geqq 1$ konvergieren.*

Denn sei

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0 \tag{1}$$

eine Gleichung mit ganzen Koeffizienten, deren sämtliche Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einfach und in E gelegen sind. Dann gilt offenbar für ihre Diskriminante

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda)^2 = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die folgende Abschätzung:

$$D \leqq a_0^{2n-2} \cdot \mathsf{M}_n, \tag{9}$$

wobei M_n den größten Wert angibt, dessen $|\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$ fähig ist, falls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in E beliebig variieren.

Nunmehr ist D nach unseren Voraussetzungen eine ganze Zahl $\geqq 1$, daher folgt nach (9)

$$\sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}. \tag{10}$$

Sind also unendlich viele Gleichungen mit den oben vorausgesetzten Eigenschaften vorhanden, so besteht die Beziehung (10) für unendlich viele verschiedene Werte von n, also ist der nach dem Satze I* gewiß existierende Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n(n-1)]{\mathsf{M}_n} \geqq 1. \tag{11}$$

Um den Beweis zu Ende zu führen, beachte man noch, daß nach den Definitionen des § 1

$$\mathsf{M}_n = V_n^2, \qquad d_n = \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n}$$

und also (11) mit

$$\lim d_n \geqq 1$$

gleichbedeutend ist.

Man gewinnt noch eine leichte Verschärfung von X. auf Grund der bekannten Tatsache, daß die nichtreellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten paarweise symmetrisch zur reellen Achse gelegen sind. Fallen also sämtliche Wurzeln von (1) in die Menge E, so gehören dieselben zum „symmetrischen Kerne“ E^* dieser Menge, d. h. zu derjenigen echten oder unechten Teilmenge von E, welche außer allen reellen Punkten von E noch aus allen solchen nichtreellen Punkten gebildet ist, die samt ihren Spiegelpunkten in bezug auf die reelle Achse zur Menge E gehören. Da nun mit E zugleich auch ihr symmetrischer Kern E^* beschränkt und abgeschlossen ist, so lautet X. in verschärfter Form, wie folgt:

X*. *Ist E eine Menge, wie in* X., *so können unendlich viele Gleichungen, wie die in* X. *charakterisierten nur dann existieren, falls die zum symmetrischen Kerne E^* von E gehörigen Durchmesser d_n^* gegen einen Grenzwert $\geqq 1$ konvergieren.*

Dieser Satz X* gibt eine notwendige Bedingung an, damit eine Menge E unendlich viele Systeme von konjugierten algebraischen gebrochenen Zahlen mit demselben gemeinsamen Nenner a_0 vollständig enthalte. Man kann an einfachen Beispielen zeigen, daß die Erfüllung dieser Bedingung nicht genügt, um die Unendlichkeit der Anzahl der eben besprochenen Zahlensysteme zu sichern. Bisher waren unsere Bemühungen, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, erfolglos.

Um die Lösung der eingangs gestellten Frage in anderer Richtung weiter zu fördern, wollen wir zuerst den Satz X* anders formuliert, auch folgendermaßen aussprechen:

XI. *Sei E eine unendliche beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge und E^* ihr symmetrischer Kern. Des weiteren seien $d_2^*, d_3^*, \ldots, d_n^*, \ldots$ die zu E^* gehörigen Durchmesser. Ist*

$$\lim_{n\to\infty} d_n^* < 1,$$

so ist die Anzahl der in X. *charakterisierten Gleichungen endlich.*

Diese Formulierung unseres bisherigen Ergebnisses suggeriert die Frage, ob mit Hilfe der einzelnen Durchmesserwerte nicht etwas Genaueres über die in Frage stehende Anzahl festzustellen wäre, falls sie der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} d_n^* < 1$ zufolge endlich ist?

In dieser Hinsicht ist die bisher nicht völlig ausgebeutete Tatsache von Bedeutung, daß die Durchmesser d_n^* eine monoton abnehmende Folge bilden. Daraus folgt nämlich, daß das Bestehen der Relation $d_n^* < 1$ für einen einzigen Wert von n schon die Ungleichung $\lim_{n\to\infty} d_n^* < 1$ zur Folge hat.

Man kann also auf die Endlichkeit der fraglichen Gleichungsanzahl schließen, sobald die Ungleichheit

$$d_n^* < 1$$

für einen einzigen Wert von n festgestellt ist.

Wir können aber noch weiter gehen. Es wurde gezeigt, daß für sämtliche Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0$$

mit ganzen und demselben höchsten Koeffizienten und mit lauter einfachen und in E fallenden Wurzeln die Beziehung

$$\sqrt[n(n-1)]{M_n} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^{n-1}}}$$

bestehen muß. Sie ist aber nach der Definition von M_n und d_n gleichbedeutend mit

$$d_n \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$$

und bleibt auch in der verschärften Form

$$d_n^* \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$$

richtig. Ist nun $\lim_{k \to \infty} d_k^* < 1$, so muß wegen des monotonen Abnehmens von d_k^* und $\sqrt[k]{a_0^2}$ von einem Werte des k an

$$d_k^* < \frac{1}{\sqrt[k]{a_0^2}} \tag{12}$$

bestehen. *Ist $\nu + 1$ der kleinste Wert von k, für welchen* (12) *gilt, so kann der Grad der fraglichen Gleichungen ν nicht übertreffen* und somit bleibt, wie leicht zu beweisen ist, auch die Anzahl derselben unter einer, nur von ν, a_0 und d_2 abhängenden Schranke. Im speziellen Falle $a_0 = 1$ läßt sich sogar diese Anzahl mit Hilfe von ν allein abschätzen, falls $\nu + 1$ wieder den kleinsten Wert von k angibt, für welchen

$$d_k^* < 1$$

besteht. Denn gibt es überhaupt solche ganzzahlige Gleichungen

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

deren sämtliche Wurzeln voneinander verschieden sind und in die Menge E^* fallen und ist

$$\varphi(x) \equiv x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0$$

diejenige unter ihnen, deren Grad möglichst groß ausfällt, so muß $f(x)$ in $\varphi(x)$ aufgehen. Nun ist aber unschwer zu folgern, daß höchstens 2^μ ganzzahlige Polynome in $\varphi(x)$ aufgehen können; daher ist auch die fragliche Gleichungsanzahl $\leqq 2^\mu$. Daraus folgt jedoch die Möglichkeit der behaupteten Abschätzung, da nach dem oben Gesagten $\mu \leqq \nu$ bestehen muß.

§ 6.

Gleichungen mit höchstem Koeffizienten $a_0 \leqq \alpha\beta^n$.

Im vorigen Paragraphen haben wir den Zusammenhang untersucht, welcher zwischen dem *„transfiniten Durchmesser“* einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge oder ihres symmetrischen Kernes E^*, d. h. zwischen $\lim_{n \to \infty} d_n$ oder $\lim_{n \to \infty} d_n^*$ und der Anzahl derjenigen Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ ganz}; \ a_0 > 0) \tag{1}$$

besteht, die einen gemeinsamen ersten Koeffizienten a_0 und lauter einfache in E fallende Wurzeln haben.

Nunmehr wollen wir die Anzahl aller Gleichungen von der Form (1 bei Aufrechterhaltung der die Wurzeln bezüglichen Bedingungen unter eine neuen Voraussetzung betreffs des ersten Koeffizienten a_0 untersuchen, indem wir ihn von nun an nicht fest vorschreiben, sondern mit dem Gleichungsgrad n anwachsen lassen, mit der einzigen Beschränkung, daß immer

$$a_0 \leqq \alpha\beta^n \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 1 \tag{13}$$

bestehe.

Da, wie bei festem a_0, auch jetzt nur endlich viele Gleichungen mi den angegebenen Eigenschaften existieren können, deren Grad vorgeschrieben ist, so können wir behaupten, daß mit der Anzahl dieser Gleichungen auch deren Grad ins Unendliche wachsen muß.

Nun besteht, wie wir sahen, für irgendeine der fraglichen Gleichungen (1) vom n-ten Grade die Ungleichheit $d_n \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$ bzw. $d_n^* \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_0^2}}$, wo d bzw. d_n^* den n-ten Durchmesser von E bzw. E^* bezeichnet, also ist nach (13

$$d_n \geqq \frac{1}{\beta^2 \sqrt[n]{\alpha^2}}, \qquad d_n^* \geqq \frac{1}{\beta^2 \sqrt[n]{\alpha^2}}.$$

Daraus folgt, daß nur dann unendlich viele Gleichungen mit den fest gesetzten Eigenschaften existieren können, wenn die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} d_n \geqq \frac{1}{\beta^2} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} d_n^* \geqq \frac{1}{\beta^2}$$

besteht.

Mit Hinsicht auf die offenbar bestehende Relation

$$\lim_{n\to\infty} d_n \geqq \lim_{n\to\infty} d_n^*$$

können wir also den Satz aussprechen:

XII. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge, deren symmetrischer Kern E^* den transfiniten Durchmesser δ^* besitzt. Ist $\alpha > 0$, $\beta > 1$, $\beta^2\delta^* < 1$, so gibt es nur endlich viele Gleichungen*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ ganz};\ a_0 > 0$$

mit lauter einfachen, in E liegenden Wurzeln, deren höchster Koeffizient a_0 der Ungleichheit

$$a_0 < \alpha\beta^n$$

genügt.

Dieser Satz enthält offenbar unsere Sätze X, X*, XI und kann a eine Verallgemeinerung der beiden Sätze V und XIV des Herrn Schu aufgefaßt werden[13]).

[13]) A. a. O. S. 388 und S. 398.

Zum Schluß dieses Paragraphen stehe noch hier folgendes Theorem, zu welchem die Verknüpfung der Sätze IX und XII unmittelbar hinführt:

XIII. *Sei E eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der x-Ebene, deren Komplementärmenge einen einfach zusammenhängenden Bereich B bildet. Bedeute*

$$x = \varphi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \frac{\tau_2}{z^2} + \ldots + \frac{\tau_n}{z^n} + \ldots$$

eine Funktion, welche das Gebiet $|z| > 1$ schlicht auf den Bereich B abbildet, während die Punkte $z = \infty$, $x = \infty$ einander entsprechen. Ist

$$\alpha > 0, \quad \beta > 1, \quad \beta^2 |\tau| < 1,$$

so gibt es nur endlichviele ganzzahlige Gleichungen (1) mit lauter einfachen, in E liegenden Wurzeln, deren höchster Koeffizient a_0 der Ungleichheit

$$a_0 < \alpha \beta^n$$

genügt.

Um die Tragweite des Satzes XIII zu erleuchten, wollen wir einige wichtige spezielle Fälle von Punktmengen E hier anführen, in welchen der Wert des Abbildungsmodul τ bekannt ist[14]).

Sei E eine Kreisfläche $|x| \leqq R$; dann ist $|\tau| = R$.

Ist E eine Ellipsenfläche, begrenzt durch die Ellipsenlinie

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \qquad (x = \xi + \eta i),$$

so ist

$$|\tau| = \frac{a+b}{2}.$$

Ist E eine Halbkreisfläche, begrenzt durch einen Halbkreis und einen Durchmesser von der Länge $2R$, so ist

$$|\tau| < \frac{4R}{3\sqrt{3}}.$$

Bilden die Randpunkte von E ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit der Sehne h und mit dem Winkel $2k\pi$ $(k < 1)$, so ist

$$|\tau| = \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{1-k}.$$

In allen diesen Fällen läßt der Satz XIII mit Hilfe der charakteristischen geometrischen Daten Bedingungen aufstellen, unter welchen die Anzahl der Gleichungen (1) ohne mehrfachen und mit insgesamt in den genannten Mengen liegenden Wurzeln bei $a_0 < \alpha \beta^n$ endlich ist.

---

[14]) Vgl. Herrn Szegös Aufsatz a. a. O. Fußnote [11]), S. 253—254.

§ 7.

Über die Annäherung der Null durch ganzzahlige Polynome in gegebener Punktmenge. Anwendung.

In diesem Paragraphen wollen wir die Frage nach der Anzahl sämtlicher ganzzahliger Gleichungen, mit festem höchsten Koeffizienten und mit lauter einfachen, in einer gegebenen Punktmenge liegenden Wurzeln mit Hilfe einer neuen Methode angreifen. Diese Methode ist nicht nur zur wiederholten Herleitung der bisherigen Ergebnisse geeignet, sondern wirft auch neues Licht auf dieselben. Insbesondere läßt sie alle ganzzahligen Gleichungen *mit dem höchsten Koeffizienten Eins*, deren sämtliche Wurzeln in eine Punktmenge von transfinitem Durchmesser < 1 fallen, interessant charakterisieren.

Unser neues Verfahren stützt sich auf die folgende, auch an und für sich bemerkenswerte Tatsache:

XIV. *Ist E eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge deren nicht-reelle Punkte symmetrisch zur reellen Achse gelegen sind und deren transfiniter Durchmeser < 1 ist, so gibt es ein nicht-identisch verschwindendes Polynom $g(x)$ mit lauter ganzzahligen Koeffizienten das dem Betrage nach überall auf E kleiner als 1 ist*[15]).

Mit a. W.: In jeder beschränkt-abgeschlossenen symmetrischen Punktmenge von einem transfinitem Durchmesser < 1 kann die Null durch ganzzahlige Polynome beliebig fein approximiert werden.

Zum Beweise werden wir zunächst für jedes ganzes $n \geqq 1$ und für symmetrische Punktmengen E vom beliebigen transfiniten Durchmesser die Existenz eines nicht-identisch verschwindenden ganzzahligen Polynoms

$$g_n(x) \equiv g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n$$

nachweisen, dessen Grad $\leqq n$ ist, und welches überall auf E der Beziehung

$$|g_n(x)| \leqq (n+1)\, d_{n+1}^{\frac{n}{2}}$$

genügt, wobei d_{n+1} den zu E gehörigen n-ten Durchmesser bedeutet.

In der Tat, ist

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$$

irgendein Polynom, dessen Grad $\leqq n$ ist, so kann man es als ein lineares Aggregat der zu E gehörigen Tschebyscheffschen Polynome $t_0(x) \equiv 1$, $t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x)$ in der Form

$$\gamma(x) = \lambda_0 t_0(x) + \lambda_1 t_1(x) + \ldots + \lambda_n t_n(x) \tag{14}$$

[15]) Satz XIV läßt sich offenbar umkehren.

darstellen; hierbei sind $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ selbst linear aus den Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ zusammengesetzt und zwar derart, daß λ_k nur die Größen $\gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$ enthält, die erste von ihnen mit dem Koeffizienten Eins, die übrigen mit reellen Koeffizienten:

$$(15)\qquad \begin{cases} \lambda_0 = \gamma_0 + \alpha_0^{(1)}\gamma_1 + \alpha_0^{(2)}\gamma_2 + \ldots + \alpha_0^{(n)}\gamma_n, \\ \lambda_1 = \quad\ \gamma_1 + \alpha_1^{(2)}\gamma_2 + \ldots + \alpha_1^{(n)}\gamma_n, \\ \lambda_2 = \qquad\ \gamma_2 + \ldots + \alpha_2^{(n)}\gamma_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n = \qquad\qquad\ \gamma_n. \end{cases}$$

Die k-te Potenz von x läßt nämlich offenbar folgende Darstellung zu:

$$x^k = t_k(x) + \alpha_{k-1}^{(k)} t_{k-1}(x) + \alpha_{k-2}^{(k)} t_{k-2}(x) + \ldots + \alpha_0^{(k)} t_0(x) \quad (1 \leqq k \leqq n),$$

wobei die Größen α *reelle* Zahlen bezeichnen, da (wegen der symmetrischen Lage von E) *auch die T-Polynome lauter reelle Koeffizienten besitzen*[16]). Daraus folgt (14) unmittelbar, mit Koeffizienten λ, die dem Gleichungssystem (15) genügen.

Nun folgt aus der Beziehung (14) in jedem Punkte x der Menge E die Ungleichung

$$(16)\qquad |\gamma(x)| \leqq |m_0\lambda_0| + \ldots + |m_n\lambda_n|,$$

wo $m_0, m_1, \ldots, m_n$ der Reihe nach das Maximum des absoluten Betrages von $t_0(x) \equiv 1, t_1(x), \ldots, t_n(x)$ auf E bezeichnen.

Von dieser Relation gelangt man zur Existenz von $g(x)$, wenn man auf die linearen Formen $m_0\lambda_0, m_1\lambda_1, \ldots, m_n\lambda_n$ der $(n+1)$ Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ mit der Determinante $m_0 m_1 \ldots m_n$ das folgende Theorem von Minkowski anwendet.

Es seien ν Formen

$$y_k = \sum_{l=1}^{\nu} b_{kl} x_l \qquad (1 \leqq k \leqq \nu)$$

mit reellen Koeffizienten und positiver Determinante D gegeben. Dann gibt es ν ganze rationale nicht sämtlich verschwindende Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ so, daß für alle k

$$y_k \leqq \sqrt[\nu]{D}.$$

Nach diesem Theorem kann man in (15) den Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ solche ganze, nicht sämtlich verschwindende Werte $g_0, g_1, \ldots, g_n$ geben, daß

$$(17)\qquad |\lambda_k| \leqq \frac{\sqrt[n+1]{m_0 m_1 \ldots m_n}}{m_k}$$

für alle $k \geqq 0, \leqq n$ bestehe.

[16]) Das ist eine leicht ersichtliche Folge der Unität dieser Polynome.

Bildet man mit diesen λ das Polynom

$$\gamma(x) = \lambda_0 t_0(x) + \lambda_1 t_1(x) + \ldots + \lambda_n t_n(x),$$

so erhält man ein Polynom

$$g_n(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n$$

mit lauter ganzen Koeffizienten, welches nicht identisch verschwindet und nach (16) und (17) der Bedingung

$$|g_n(x)| \leqq (n+1)\sqrt[n+1]{m_1 m_2 \ldots m_n} \tag{18}$$

überall auf E genügt. Nun ist aber nach (8) und (2)

$$\sqrt[n+1]{m_1 m_2 \ldots m_n} \leqq \sqrt[n+1]{V_{n+1}} = d_{n+1}^{\frac{n}{2}},$$

also involviert (18) die Ungleichung

$$|g_n(x)| \leqq (n+1) d_{n+1}^{\frac{n}{2}};$$

damit ist die behauptete Existenz bewiesen. Daraus folgt schon die Richtigkeit des Satzes XIII fast unmittelbar. Ist nämlich der transfinite Durchmesser von $E < 1$, d. h. ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n < 1$, so gibt es einen Wert des n, von welchem an $(n+1) d_{n+1}^{\frac{n}{2}} < 1$; dann genügt aber $g_n(x)$ den Bedingungen des Satzes XIII. W. z. b. w.

Nunmehr wollen wir auf Grund des eben bewiesenen Satzes XIII zunächst den Satz XI von neuem herleiten.

Sei also E eine unendliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der x-Ebene und E^* ihr symmetrischer Kern, dessen Durchmesser d_n^* der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} d_n^* < 1$$

genügt. Dann gibt es nach XIII ein nicht-identisch verschwindendes ganzzahliges Polynom

$$g(x) = e_0 x^k + e_1 x^{k-1} + \ldots + e_k,$$

welches überall auf E^* dem Betrage nach $\leqq M < 1$ ausfällt. Ist nun

$$\varphi(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu \tag{19}$$

irgendein ganzzahliges irreduzibles Polynom mit lauter in E^* liegenden Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, dessen höchster Koeffizient ein Teiler von a_0 (d. h. von dem gemeinsamen höchsten Koeffizienten der zu betrachtenden Polynome) ist, so gilt für die Sylvestersche Resultante von $\varphi(x)$ und $g(x)$

$$R = \alpha_0^k g(\xi_1) g(\xi_2) \ldots g(\xi_\nu)$$

die Abschätzung

$$|R| < a_0^k M^\nu. \tag{20}$$

Daraus folgt aber, daß die nach unseren Voraussetzungen ganzwertige Zahl R verschwinden muß, sobald ν eine, nur von a_0 abhängige Grenze ν_0 übersteigt. Daher kann das Polynom $\varphi(x)$ seine sämtlichen Nullstellen nur dann in E^* haben, wenn entweder sein Grad $\leqq \nu_0$ ist, oder für mindestens eine seiner Nullstellen $g(x)$ verschwindet; im letzteren Falle ist $\varphi(x)$ notwendigerweise ein Teiler von $g(x)$.

Um aus diesen Ergebnissen zum Satze XI zu gelangen, beachte man nun, daß jedes ganzzahlige Polynom

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 > 0)$$

mit dem höchsten Koeffizienten a_0 und mit lauter einfachen, in E^* liegenden Wurzeln entweder selbst ein irreduzibles Polynom, wie das oben charakterisierte $\varphi(x)$ ist, oder sich, wenn es reduzibel ist, als Produkt aus solchen, voneinander verschiedenen Polynomen $\varphi(x)$ darstellen läßt. Da aber die Anzahl der ganzzahligen Polynome mit höchstem Koeffizienten $\leqq a_0$ und vom Grade $\leqq \nu_0$, deren sämtliche Wurzeln in E^* fallen, sowie die Anzahl der Teiler von $g(x)$ endlich ist, so muß auch die Anzahl der in Frage stehenden Polynome $f(x)$ endlich ausfallen. W. z. b. w.

Indem wir erwähnen, daß auch der Satz XII, den wir im vorigen Paragraphen nach der „Diskriminantenmethode“ des Herrn Schur hergeleitet haben, sich mit unserer oben angewandten „Resultantenmethode“ beweisen läßt, wollen wir mit Hilfe der letzteren Methode den Satz XI ergänzen für den speziellen Fall, wo der höchste Koeffizient $a_0 = 1$ ist.

Sei E eine Punktmenge, wie in XI und $g(x)$ irgendein Polynom, dessen Existenz für den symmetrischen Kern E^* von E aus dem Satz XIII folgt. Ferner sei $f(x)$ irgendein ganzzahliges Polynom der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

mit lauter einfachen, in E^* liegenden Wurzeln und $\varphi(x)$ irgendein ganzzahliger irreduzibler Teiler von $f(x)$. Dann gilt nach (20) für die Sylvestersche Resultante R der Polynome $\varphi(x)$ und $g(x)$ die Abschätzung

$$|R| < 1,$$

also muß R verschwinden und $\varphi(x)$ in $g(x)$ aufgehen.

Wir haben somit folgendes bewiesen:

XIV. *Ist E eine beliebige Punktmenge, wie in* XI *und $g(x)$ irgendein ganzzahliges nicht-identisch verschwindendes Polynom, dessen absoluter Betrag auf dem symmetrischen Kerne E^* von E überall < 1 ist, so muß jedes ganzzahlige Polynom mit höchstem Koeffizienten Eins und mit lauter einfachen in E liegenden Nullstellen in $g(x)$ aufgehen,*

Budapest, den 17. Juli 1922.

(Eingegangen am 20. Juli 1922.)

Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme.

Von

J. G. van der Corput in Groningen.

Es gibt eine nicht-triviale obere Schranke für den absoluten Betrag der Summe $\sum_{\alpha<n<\beta}' e^{2\pi i f(n)}$ (n ganz), wenn die folgende Voraussetzung erfüllt ist.

A. Es sei $\alpha - \frac{1}{2}$ und $\beta - \frac{1}{2}$ ganz, $\alpha < \beta$, $f(u)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ reell, zweimal differentiierbar[1]), $f''(u)$ stets $\geqq \varrho$ oder stets $\leqq -\varrho$, wo ϱ eine positive von u unabhängige Zahl $\leqq 1$ bezeichnet.

Es gilt nämlich der Satz[2])

Satz 1. *Unter der Voraussetzung* A *gibt es eine absolute Konstante* c_1 *mit der Eigenschaft*

$$(1) \qquad \left| \sum_{\alpha<n<\beta}' e^{2\pi i f(n)} \right| < c_1 \left(\frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \right);$$

wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, gibt es eine absolute Konstante* c_2 *mit der Eigenschaft*

$$(2) \qquad \left| \sum_{\alpha<n<\beta}' e^{2\pi i f(n)} \right| < c_2 \left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{f'(\alpha)} \right).$$

Diese Ergebnisse können verallgemeinert werden durch Einführung einer zweiten Voraussetzung:

B. Es habe die reelle Funktion $\psi(v)$ die Periode 1; es sei $\psi(v)$ absolut $\leqq 1$, im Intervall $0 < v < 1$ monoton, und es sei

$$\int_0^1 \psi(v)\,dv = 0.$$

[1]) In den Endpunkten eventuell nur einseitig.

[2]) J. G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen [Mathematische Annalen 84 (1921), S. 53—79], Satz 2. Nach diesem Satze genügen in den Ungleichungen (1) und (2) $c_1 = 4$ und $c_2 = 10$.

Dann ergibt sich aus Satz 1 allgemeiner, aber bei kleinem ϱ ungenauer[3])[4])

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen* A *und* B *gibt es eine absolute Konstante* c_3 *mit der Eigenschaft*

$$(3) \qquad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n))\right| < c_3\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right);$$

wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, gibt es eine absolute Konstante* c_4 *mit der Eigenschaft*

$$(4) \qquad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n))\right| < c_4\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right).$$[5])

Der folgende Satz[6]) gibt eine Anwendung auf Gitterpunktprobleme[7]).

Satz 3. *Es sei Voraussetzung* A *erfüllt; es sei* $-\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$, $\gamma - \frac{1}{2}$ *ganz, und es werde für* $\alpha \leqq u \leqq \beta$ *im Falle* $\lambda \neq 0$

$$g(u) = \frac{e^{2\pi i \lambda u}}{2i \sin \pi\lambda}\left(f(u) - \gamma + \frac{i}{2} f'(u) \cot \pi\lambda\right)$$

gesetzt. Es sei weiter im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ *stets* $f(u) \geqq \gamma$; *es bezeichne* G *den Bereich* $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $\gamma \leqq v \leqq f(u)$, und es werde gesetzt

$$A(G) = \sum_G e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)},$$

erstreckt über die Koordinatenpaare u *und* v *der Gitterpunkte von* G. *Endlich sei*

---

[3]) Nach der ersten Anwendung von Satz 5 der in Fußnote 2 genannten Arbeit genügen in den Ungleichungen (3) und (4) $c_3 = 45$ und $c_4 = 53$.

[4]) J. G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode [Mathematische Zeitschrift **10** (1921), S. 105–120], Satz 1. Ebendort beweise ich diesen Satz rein arithmetisch und unmittelbar, d. h. ohne den ersten Satz zu benutzen.

[5]) Für die Sätze 1 und 2 ist die Voraussetzung $\varrho \leqq 1$ unnötig. Denn die linke Seite der Ungleichungen (1), (2), (3) und (4) ist $\leqq \beta - \alpha$, und wenn θ die Zahl $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ bezeichnet, ist jede der Zahlen

$$\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho^{1-\theta}} \quad \text{und} \quad \frac{f'(\beta)}{\varrho^{1-\theta}}$$

nicht kleiner als

$$\frac{1}{\varrho^{1-\theta}}\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du \geqq \frac{1}{\varrho^{1-\theta}}\int_\alpha^\beta \varrho\,du = (\beta-\alpha)\cdot\varrho^\theta.$$

[6]) Satz 6 der in Fußnote 2 erwähnten Arbeit.

[7]) Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

$$T(G) = A(G) - \iint_G dv\,du \qquad \text{falls } \lambda = \mu = 0,$$
$$= A(G) - g(\beta) + g(\alpha) \qquad \text{falls } \lambda \neq 0,\ \mu = 0,$$
$$= A(G) - \frac{ie^{2\pi i\mu\gamma}}{2\sin\pi\mu}(\beta - \alpha) \qquad \text{falls } \lambda = 0,\ \mu \neq 0,$$
$$= A(G) \qquad \text{falls } \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0.$$

Dann gibt es eine nur von λ und μ abhängige Konstante c_5 mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_5\left(\frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right), \tag{5}$$

und wenn außerdem $\lambda = 0$, $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ist, gibt es eine nur von μ abhängige Konstante c_6 mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_6\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right). \tag{6}$$

Diese drei Sätze haben einen Nachteil; die Ergebnisse sind nämlich unscharf, wenn $|f''(u)|$ in einem Punkte sehr klein ist, da man dann ϱ sehr klein wählen muß, und die Sätze sind überhaupt nicht anwendbar, wenn $f''(u)$ in einem Punkte verschwindet. Darum werde ich in dieser Note drei entsprechende Sätze beweisen, die diesen Nachteil nicht besitzen. Zu diesem Zwecke ersetze ich Voraussetzung A durch

C. Es sei $\alpha - \frac{1}{2}$ und $\beta - \frac{1}{2}$ ganz, $\alpha < \beta$, k ganz $\geqq 2$, $f(u)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ reell, k mal differentiierbar[1]), $f^{(k)}(u)$ stets $\geqq \varrho$ oder stets $\leqq -\varrho$, wo ϱ eine positive von u unabhängige Zahl bezeichnet; im Falle $k = 2$ wird außerdem noch $f''(u)$ monoton vorausgesetzt.

Aus den Sätzen 1, 2 und 3 werde ich dann ableiten

Satz 4. *Unter der Voraussetzung* C *gibt es eine nur von k abhängige Konstante c_7 mit der Eigenschaft*

$$\left|\sum_{\alpha < n < \beta} e^{2\pi i f(n)}\right| < c_7\left(\int_\alpha^\beta \sqrt{|f''(u)|}\,du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\right). \tag{7}$$

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen* C *und* B *gibt es eine nur von k abhängige Konstante c_8 mit der Eigenschaft*

$$\left|\sum_{\alpha < n < \beta} \psi(f(n))\right| < c_8\left(\int_\alpha^\beta \sqrt[3]{|f''(u)|}\,du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\right). \tag{8}$$

Satz 6. *Es werde in den Voraussetzungen von Satz* 3 A *durch* C *ersetzt.*

Falls $\mu = 0$ ist, gibt es eine nur von k und λ abhängige Konstante c_9 mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_9 \left\{ \int_\alpha^\beta (\sqrt[3]{|f''(u)|} + |f''(u)|)\, du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}} \right\}. \tag{9}$$

Falls $\mu \neq 0$ ist, gibt es eine nur von k, λ und μ abhängige Konstante c_{10} mit der Eigenschaft

$$|T(G)| < c_{10} \left(\int_\alpha^\beta \sqrt[3]{|f''(u)|}\, du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}} \right). \tag{10}$$

Man kann das in der letzten Zeile vorkommende Integral in eine andere Gestalt bringen, wenn man im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$

$$s_u = s = \int_\alpha^u \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du \quad \text{und} \quad \frac{1}{R} = \frac{|f''(u)|}{(1 + (f'(u))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt, so daß man in den Punkten, wo $f''(u) \neq 0$ ist, R als den absoluten Betrag des Krümmungsradius bezeichnen kann; dann ist

$$\int_\alpha^\beta \sqrt[3]{|f''(u)|}\, du = \int_0^{s_\beta} \frac{ds}{\sqrt[3]{R}}.$$

Falls im Intervall $\alpha \leqq \overset{u_1}{u_2} \leqq \beta$

$$|f'(u_2) - f'(u_1)| \leqq q$$

ist, wo q unabhängig von u_1 und u_2 ist, so ist

$$\int_\alpha^\beta |f''(u)|\, du \leqq (k-1)\, q;$$

denn da $f^{(k)}(u)$ stets positiv oder stets negativ ist, kann man das Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ in $k-1$ Teilintervalle zerlegen, derart, daß $f''(u)$ in jedem dieser Teilintervalle stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ ist.

Es ist klar, daß die in den letzten drei Sätzen mit $k = 2$ gefundenen Abschätzungen jedenfalls nicht weniger scharf sind als die Ungleichungen (1), (3) und (5); denn da $f''(u)$ in Voraussetzung A stets positiv oder stets negativ vorausgesetzt wird, ist $f'(u)$ monoton, also, $\theta = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{1}{3}$ gesetzt,

$$\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\, du = \int_\alpha^\beta \frac{|f''(u)|^\theta}{f''(u)}\, df'(u) \leqq \frac{1}{\varrho^{1-\theta}} \left| \int_\alpha^\beta df'(u) \right| = \frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\varrho^{1-\theta}},$$

und da $\varrho \leqq 1$ vorausgesetzt ist, ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f''(u)|\,du = |f'(\beta) - f'(\alpha)| \leqq \frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\varrho^{1-\theta}}.$$

Um die Sätze 4, 5 und 6 zu beweisen, brauchen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es seien die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt; es bezeichne δ eine ganze Zahl im Intervall $\alpha + \frac{1}{2} \leqq \delta \leqq \beta - \frac{1}{2}$, und es bezeichne G' den Bereich $\delta - \frac{1}{2} \leqq u \leqq \delta + \frac{1}{2}$, $\gamma \leqq v \leqq f(u)$.

Falls $\mu = 0$ ist, gibt es eine nur von λ abhängige Konstante c_{11} mit der Eigenschaft

$$|T(G')| < c_{11}\Big(\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|\,du + 1\Big).$$

Falls $\mu \neq 0$ ist, gibt es eine nur von μ abhängige Konstante c_{12} mit der Eigenschaft

$$|T(G')| < c_{12}.$$

Beweis. Der Hilfssatz ist für $\mu \neq 0$ klar; denn dann ist

$$T(G') = A(G') - \frac{ie^{2\pi i\mu\gamma}}{2\sin\pi\mu} \quad \text{oder} \quad T(G') = A(G'),$$

und wegen $\mu \neq 0$ ist

$$|A(G')| = |e^{2\pi i\lambda\delta} \sum_{v=\gamma+\frac{1}{2}}^{[f(\delta)]} e^{2\pi i\mu v}|$$

kleiner als eine nur von μ abhängige Konstante. Es werde also $\mu = 0$ gesetzt.

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $\lambda = 0$ ist oder nicht.

1. Es sei $\lambda = 0$. Nach dem Mittelwertsatz ist für $\delta - \frac{1}{2} \leqq u \leqq \delta + \frac{1}{2}$

$$|f(u) - f(\delta) - (u-\delta)f'(\delta)| = |u-\delta| \cdot |f'(\xi) - f'(\delta)| \leqq \frac{1}{2}\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|\,du,$$

$$(u \leqq \xi \leqq \delta \text{ bzw. } \delta \leqq \xi \leqq u),$$

also

$$\Big|\iint_{G'} du\,dv - f(\delta) + \gamma\Big| = \Big|\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} (f(u) - f(\delta) - (u-\delta)f'(\delta))\,du\Big| \leqq \frac{1}{2}\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|\,du.$$

Daher ist

$$|T(G')| = \Big|[f(\delta)] - \gamma + \frac{1}{2} - \iint_{G'} du\,dv\Big| \leqq \Big|[f(\delta)] - f(\delta) + \frac{1}{2}\Big|$$

$$+ \Big|\iint_{G'} du\,dv - f(\delta) + \gamma\Big| \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|\,du.$$

2. Es sei $\lambda \neq 0$. Es werde im Intervall $\delta - \frac{1}{2} \leqq u \leqq \delta + \frac{1}{2}$

$$\chi(u) = g(u) - \frac{e^{2\pi i \lambda u}}{2i \sin \pi\lambda}\left(f(\delta) - \gamma + (u-\delta) f'(\delta) + \frac{i}{2} f'(\delta) \cot \pi\lambda\right)$$

gesetzt, also

$$\begin{aligned} -\chi\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + \chi\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right) &= -g\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + g\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{f(\delta)-\gamma}{2i\sin\pi\lambda}\left(e^{2\pi i\lambda(\delta+\frac{1}{2})} - e^{2\pi i\lambda(\delta-\frac{1}{2})}\right) \\ &\quad + \frac{f'(\delta)}{2i\sin\pi\lambda}\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot\pi\lambda\right) e^{2\pi i\lambda(\delta+\frac{1}{2})} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\cot\pi\lambda\right) e^{2\pi i\lambda(\delta-\frac{1}{2})}\right\} \\ &= -g\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + g\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right) + (f(\delta)-\gamma) e^{2\pi i\lambda\delta}; \end{aligned}$$

denn der Koeffizient von $f'(\delta)$ verschwindet.

Daher ist

$$\begin{aligned} |T(G')| &= \left|\left([f(\delta)] - \gamma + \tfrac{1}{2}\right) e^{2\pi i\lambda\delta} - g\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + g\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqq \frac{1}{2} + \left|(f(\delta)-\gamma) e^{2\pi i\lambda\delta} - g\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + g\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} + \left| -\chi\left(\delta+\tfrac{1}{2}\right) + \chi\left(\delta-\tfrac{1}{2}\right)\right|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung; denn nach dem Mittelwertsatz ist für $\delta - \frac{1}{2} \leqq u \leqq \delta + \frac{1}{2}$

$$\chi(u) = \frac{e^{2\pi i\lambda u}}{2i\sin\pi\lambda}\left\{(u-\delta)(f'(\eta) - f'(\delta)) + \frac{i}{2}(f'(u) - f'(\delta))\cot\pi\lambda\right\}$$
$$(u \leqq \eta \leqq \delta \text{ bzw. } \delta \leqq \eta \leqq u),$$

also bei geeignet gewähltem, nur von λ abhängigem c_{13}

$$|\chi(u)| \leqq c_{13} \int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|\, du.$$

Hilfssatz 2. Es sei Voraussetzung C erfüllt; es bezeichne δ eine ganze Zahl im Intervall $\alpha + \frac{1}{2} \leqq \delta \leqq \beta - \frac{1}{2}$, und es sei $\theta = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{1}{3}$. Dann gibt es eine nur von k abhängige Zahl c_{14} mit der Eigenschaft

$$1 < c_{14}\left(\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}} |f''(u)|^{\theta} du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\right).$$

Beweis. Wir können $\varrho \geqq 1$ voraussetzen, da sonst die Behauptung (mit $c_{14} = 1$) trivial ist.

Wenn eine Funktion $\varphi(u)$ auf einer Strecke der Länge $l\,(l > 0)$ differentiierbar[1]), und $\varphi'(u)$ ebendort stets $\geqq p$ oder stets $\leqq -p$ ist,

wobei p eine von u unabhängige positive Zahl bezeichnet, so gibt es, wie man unmittelbar einsieht, eine Teilstrecke der Länge $\frac{l}{4}$, wo $\varphi(u)$ stets $\geqq \frac{pl}{4}$ oder stets $\leqq -\frac{pl}{4}$ ist. Da $f^{(k)}(u)$ wegen $\varrho \geqq 1$ auf der Strecke $(\delta - \frac{1}{2}, \delta + \frac{1}{2})$ stets $\geqq 1$ oder stets $\leqq -1$ ist, gibt es also eine Teilstrecke der Länge $\frac{1}{4}$, wo $f^{(k-1)}(u)$ stets $\geqq \frac{1}{4}$ oder stets $\leqq -\frac{1}{4}$ ist, also eine Teilstrecke der Länge $\frac{1}{4^2}$, wo $f^{(k-2)}(u)$ stets $\geqq \frac{1}{4^3}$ oder stets $\leqq -\frac{1}{4^3}$ ist usw. Die Strecke $(\delta - \frac{1}{2}, \delta + \frac{1}{2})$ enthält also eine Teilstrecke der Länge $\frac{1}{4^{(k-2)}}$, wo $f''(u)$ stets $\geqq c_{15}$ oder stets $\leqq -c_{15}$ ist; hierin bezeichnet c_{15} eine positive nur von k abhängige Zahl $\leqq 1$. Hieraus folgt die Behauptung mit $c_{14} = 4^{k-2} c_{15}^{-1}$, da auf dieser Teilstrecke $\sqrt{|f''(u)|}$ und $\sqrt[3]{|f''(u)|} \geqq c_{15}$ sind.

Beweis der Sätze 4, 5 und 6. Es bezeichne θ die Zahl $\frac{1}{2}$ beim Beweis von Satz 4, die Zahl $\frac{1}{3}$ beim Beweis der Sätze 5 und 6; es werde $\omega = 1$ bei Satz 6 im Falle $\mu = 0$, sonst $\omega = 0$ gesetzt.

Wir werden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $k = 2$ oder > 2 ist.

1. Es sei $k = 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $|f''(u)|$ monoton nicht-abnehmend voraussetzen, da sonst $f(u)$ nur durch $f(-u)$ zu ersetzen ist. Es werde $|f''(\beta)| = r$ gesetzt, und es bezeichne H die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft $\frac{r}{2^H} \geqq |f''(\alpha)|$, so daß $H \geqq 0$ und $\frac{2^H}{r} \leqq \frac{1}{\varrho}$, also

$$\sum_{h=0}^{H} \frac{2^{\frac{h}{2}}}{\sqrt{r}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2^{\frac{H}{2}}}{\sqrt{r}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \tag{11}$$

ist.

Wir markieren alle $\sigma \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ auf der Strecke $\alpha \leqq u \leqq \beta$. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 1 findet man, daß der Beitrag der zwischen zwei konsekutiven dieser Punkte σ und $\sigma + 1$ gelegenen Teilstrecken zu der linken Seiten von (7), (8) und (9)

$$< c_{16}\left(\omega \int_{\sigma}^{\sigma+1} |f''(u)|\, du + 1\right)$$

ist, wo c_{16} (desgl. c_{17}, c_{18} und c_{19} nachher) eine höchstens nur von λ und μ abhängige geeignet gewählte Konstante bezeichnet. Dieses Resultat benutzen wir für jede jener Teilstrecken $(\sigma, \sigma + 1)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{r}{2^{h+1}} < |f''(\sigma)| \leqq \frac{r}{2^h} < |f''(\sigma+1)| \qquad (h \text{ ganz, also } 1 \leqq h \leqq H) \tag{12}$$

Wegen $1 < A^\theta + A^{-\frac{1}{2}}$ für $A > 0$ ist

$$1 < \left(\frac{r}{2^{h+1}}\right)^\theta + \left(\frac{2^{h+1}}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \int_\sigma^{\sigma+1} |f''(u)|^\theta \, du + \frac{2^{\frac{h+1}{2}}}{\sqrt{r}},$$

so daß der Beitrag der Teilstrecke $(\sigma, \sigma+1)$ absolut

$$< c_{16}\left(\omega \int_\sigma^{\sigma+1} |f''(u)| \, du + \int_\sigma^{\sigma+1} |f''(u)|^\theta \, du + \frac{2^{\frac{h+1}{2}}}{\sqrt{r}}\right)$$

ist. Zu jedem positiven $h \leqq H$ gibt es höchstens eine dieser Teilstrecken mit (12), so daß wegen (11) der Beitrag aller dieser Teilstrecken absolut genommen

$$< c_{17}\left(\omega \int_\alpha^\beta |f''(u)| \, du + \int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta \, du + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right)$$

ist.

Wir lassen diese Teilstrecken $(\sigma, \sigma+1)$ (falls sie überhaupt vorkommen) auf dem Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ fort; falls das ganze Intervall hiermit nicht aufgebraucht ist, verbleiben endlich viele Reststrecken $a \leqq u \leqq b$ mit $a \equiv b \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$, auf deren jeder

$$\frac{r}{2^{h+1}} \leqq |f''(u)| \leqq \frac{r}{2^h} \qquad (h \text{ ganz}, \ 0 \leqq h \leqq H) \tag{13}$$

ist. Nach den Sätzen 1, 2 und 3 mit $\varrho = \frac{r}{2^{h+1}}$ ist der absolute Beitrag jeder dieser Reststrecken, $\varrho \leqq 1$ vorausgesetzt, kleiner als

$$c_{18}\left(\frac{|f'(b) - f'(a)|}{\left(\frac{r}{2^h}\right)^{1-\theta}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{2^h}}}\right) \leqq c_{18}\left(\int_a^b \frac{|f''(u)|}{|f''(u)|^{1-\theta}} \, du + \frac{2^{\frac{h}{2}}}{\sqrt{r}}\right)$$

$$\leqq c_{18}\left(\int_a^b |f''(u)|^\theta \, du + \omega \int_a^b |f''(u)| \, du + \frac{2^{\frac{h}{2}}}{\sqrt{r}}\right);$$

nach Fußnote [5]) und Hilfssatz 1 gilt dieses Resultat bei geeignet gewähltem c_{18} auch wenn $\varrho > 1$ ist.

Zu jedem nicht-negativen ganzen $h \leqq H$ gibt es höchstens nur eine

dieser Reststrecken mit (13), so daß der absolute Beitrag aller diese Reststrecken wegen (11) kleiner ist als

$$c_{18}\Big(\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\,du+\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\sum_{h=0}^{H}\frac{2^{\frac{h}{2}}}{\sqrt{r}}\Big)$$

$$<c_{19}\Big(\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\,du+\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\Big).$$

Hiermit ist der Fall $k=2$ erledigt.

2. Es sei $k>2$. Es sei die Behauptung für $k-1$ bewiesen, und für k zu beweisen. Da $f^{(k)}(u)$ stets positiv oder stets negativ ist, können wir (α,β) in drei Teilintervalle $(\alpha,\delta-\frac{1}{2})$, $(\delta-\frac{1}{2},\delta+\frac{1}{2})$, $(\delta+\frac{1}{2},\beta)$ zerlegen, derart, daß $\alpha\leqq\delta-\frac{1}{2}<\delta+\frac{1}{2}\leqq\beta$ und δ ganz ist, und daß in jedem der Intervalle $(\alpha,\delta-\frac{1}{2})$ und $(\delta+\frac{1}{2},\beta)$ $f^{(k-1)}(u)$ stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ ist. Nach den Hilfssätzen 1 und 2 ist der Beitrag der Strecke $(\delta-\frac{1}{2},\delta+\frac{1}{2})$ absolut kleiner als

$$c_{20}\Big(\omega\int_{\delta-\frac{1}{2}}^{\delta+\frac{1}{2}}|f''(u)|\,du+1\Big)<c_{21}\Big(\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\,du+\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\Big),$$

wobei c_{20} und c_{21} (desgl. c_{22}, c_{23} und c_{24} nachher) geeignet gewählte Konstanten sind, die höchstens nur von k, λ und μ abhängen. Wir brauchen also nur noch den Satz für die Strecken $(\alpha,\delta-\frac{1}{2})$ und $(\delta+\frac{1}{2},\beta)$ zu beweisen, d. h. wir dürfen $f^{(k-1)}(u)$ im Intervall $\alpha\leqq u\leqq\beta$ stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ voraussetzen.

Ist $\beta-\alpha\leqq 1+\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}$, so ist die Behauptung trivial, da dann die linke Seite von (7), (8) und (9) nach den Hilfssätzen 1 und 2 absolut genommen kleiner ist als

$$c_{22}\Big(\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\beta-\alpha\Big)\leqq c_{22}\Big(\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+1+\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\Big)$$

$$<c_{23}\Big(\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\,du+\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\Big).$$

Andernfalls schneiden wir von dem Ende, wo $|f^{(k-1)}(u)|$ am kleinsten ist, ein Stück der Länge $1+\Big[\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\Big]$ ab; dessen Beitrag ist absolut kleiner als

$$c_{23}\Big(\omega\int_\alpha^\beta |f''(u)|\,du+\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta\,du+\frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\Big).$$

Auf der verbleibenden Strecke ist $f^{(k-1)}(u)$ beständig zu- oder beständig abnehmend, von festem Vorzeichen und wegen $|f^{(k)}(u)| \geqq \varrho$ absolut $> \varrho \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}} = \varrho^{\frac{k-1}{k}}$. Wir können auf dieser Strecke die Sätze 4, 5 und 6 mit $k-1$ statt k, und mit $\varrho^{\frac{k-1}{k}}$ statt ϱ anwenden, so daß der Beitrag dieser Strecke

$$< c_{24}\left(\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta du + \omega \int_\alpha^\beta |f''(u)|\, du + \frac{1}{\sqrt[k-1]{\varrho^{\frac{k-1}{k}}}}\right)$$

$$= c_{24}\left(\int_\alpha^\beta |f''(u)|^\theta du + \omega \int_\alpha^\beta |f''(u)|\, du + \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}\right)$$

ist.

Hiermit sind die Sätze 4, 5 und 6 vollständig bewiesen.

Freiburg (Schweiz), den 29. Juli 1922.

(Eingegangen am 2. August 1922.)

Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten.

Von

Werner Rogosinski in Breslau.

Im folgenden sollen einige recht allgemeine Potenzreihensätze entwickelt werden, die schon ihrer einfachen und anschaulichen Gestalt, dann aber auch der Leichtigkeit ihrer Herleitung wegen Interesse verdienen dürften. Es handelt sich darum, für die durch eine Potenzreihe geleistete Abbildung ihres Konvergenzkreises Bildschranken möglichst allgemeiner Art zu erhalten und ein Gleiches für die Abbildungen durch die Abschnitte der Potenzreihe zu erzielen. Der leitende Gedanke ist dabei, solche Bildschranken zunächst unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die zu betrachtenden Potenzreihen abzuleiten, diese Voraussetzungen aber so einfach zu halten, daß sie mutatis mutandis bei einer jeden Potenzreihe erfüllt sind, wenn man nur statt des ganzen Konvergenzkreises einen beliebigen konzentrischen echten Teilkreis desselben ins Auge faßt. Die gleichmäßige Beschränktheit der Abbildung im ganzen Konvergenzkreis ist z. B. eine solche Voraussetzung.

Der § 1 wird die entscheidende Bedeutung des bekannten Schwarzschen Lemmas[1]) für unsere Aufgabe, soweit sie die Potenzreihe selbst betrifft, ins rechte Licht rücken. Im § 2 wird eine zweidimensionale Interpretation des Haupttheorems von Herrn Carathéodory[2]) über die Potenzreihen mit positivem Realteile gebracht, die dann im § 3 eine Reihe einfacher allgemeiner Sätze der gesuchten Art auch für die Abschnitte der Potenzreihen auszusprechen gestattet. Schließlich überträgt sich in

[1]) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen **2** (1890), S. 110–111.

[2]) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Annalen **64** (1907), S. 95–115; vgl. auch: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Palermo Rend. **32** (1911), S. 193–217.

§ 4 das genannte Theorem sinngemäß auf eine andere Potenzreihenklasse und läßt weitere allgemeine Folgerungen zu.

Wir wollen uns im übrigen stets auf Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius r beschränken. Unsere allgemeinen Resultate der §§ 3 und 4 werden trotzdem auch für ganze Funktionen richtig bleiben, wie dort unmittelbar einleuchtet. Schließlich dürfen wir noch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ setzen, da wir dies jederzeit durch eine geeignete Variablentransformation erreichen können.

§ 1.

Das klassische Hilfsmittel für das Studium der durch eine Potenzreihe gelieferten Abbildung ihres Konvergenzkreises ist das bekannte

Schwarzsche Lemma[1]). *Ist* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *eine für* $|z| < 1$ *konvergente Potenzreihe, für die also* $f(0) = 0$ *ist und für welche ferner* $|f(z)| \leqq 1$ *für* $|z| < 1$ *gelten möge, so ist für alle* $|z| < 1$ *sogar*

$$|f(z)| \leqq |z|.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur im Falle $f(z) = ze^{i\vartheta}$ (ϑ *reell*) *ein.*

Es sei jetzt $\mathfrak{G}$ irgendein einfach zusammenhängendes (nicht notwendig endliches oder schlichtes) Gebiet einer w-Ebene, dessen Inneres sich umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des Kreises $|z| = 1$ abbilden läßt. $z = \Phi(w) = \Phi_{\mathfrak{G}}(w; w_0)$ sei eine solche abbildende Funktion, $w = \varphi(z) = \varphi_{\mathfrak{G}}(z; w_0)$ ihre inverse, daß ein gewisser, im übrigen beliebiger innerer Punkt w_0 von $\mathfrak{G}$ dem Punkte $z = 0$ entspricht. Ist nun $w = f(z)$ eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe mit $f(0) = w_0$, bei welcher $f(z)$ für alle $z < 1$ auf $\mathfrak{G}$ beschränkt bleibt, so ist doch

$$F(z) = \Phi(f(z))$$

eine die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas erfüllende Potenzreihe. Daher ist für alle $|z| = \varrho < 1$ gewiß $|F(z)| \leqq \varrho$, d. h., wenn man jetzt alles in der z-Ebene deutet, das Bild des Kreises $|z| = \varrho$ durch $F(z)$ fällt ganz in das Innere oder auf den Rand dieses Kreises. Bei der umkehrbar eindeutigen Abbildung von $|z| < 1$ durch $\varphi(z)$ auf das Gebiet $\mathfrak{G}$ der w-Ebene muß also das Bild des Kreises $|z| = \varrho$ durch

$$\varphi(F(z)) = \varphi(\Phi(f(z))) \equiv f(z)$$

ganz in das Innere oder auf den Rand des Bildes dieses Kreises durch $\varphi(z)$ fallen. Das Schwarzsche Lemma lehrt noch genauer, daß nur im Falle

$$f(z) \equiv \varphi(ze^{i\vartheta}) \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

die durch $\varphi(z)$ gebotenen Bildschranken wirklich erreicht werden, womit

zugleich nachträglich gezeigt ist, daß $\varphi_{\mathfrak{G}}(z; w_0)$ selbst bis auf Drehungstransformationen in z eindeutig bestimmt ist.

Betrachtet man also bei festem $\mathfrak{G}$ und festem w_0 die Klasse $(\mathfrak{F})$ aller für $|z|<1$ konvergenten Potenzreihen $f(z)$ mit $f(0)=w_0$, für die $f(z)$ für alle $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}$ beschränkt bleibt, so erhalten wir im eben ausgeführten Sinne Bildschranken durch die spezielle zu $(\mathfrak{F})$ gehörige Funktion $\varphi(z)=\varphi_{\mathfrak{G}}(z; w_0)$.

Ist z. B. $\mathfrak{G}$ die Halbebene $\Re w>0$, so wird

$$\varphi(z)=\frac{w_0+z\overline{w}_0}{1-z}, \tag{1}$$

woraus man die bekannten Ungleichungen des Herrn Carathéodory[3] für Potenzreihen mit positivem Realteile in ihrer schärfsten geometrischen Gestalt unmittelbar ableiten kann.

Ich möchte hier noch eine andere interessante Anwendung dieses Gedankenganges machen.

Satz I. *$f(z)$ sei eine für $|z|<1$ konvergente Potenzreihe. Es möge irgendeinen Winkelraum von der Öffnung $\alpha<\pi$ geben, so daß die Ableitung $f'(z)$ für $|z|<1$ auf diesen beschränkt bleibt. Dann ist $f(z)$ für $|z|<1$ gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. Der Winkelraum $\mathfrak{G}$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in einer w-Ebene so angenommen werden, daß $w=0$ sein Scheitel, die positive reelle w-Achse seine Winkelhalbierende wird. Denn sonst kann man a und ein reelles ψ so bestimmen, daß für

$$f_1'(z)=e^{i\psi}(f'(z)+a)$$

dies der Fall ist. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $f_1(z)$ für $|z|<1$ folgt aber die von

$$f(z)=e^{-i\psi}f_1(z)-az+b,$$

wo b eine weitere Konstante ist.

Ist nun $w_1=f'(0)$ ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, so ist $f'(z)\equiv w_1$, also $f(z)$ linear und gewiß in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkt.

Sei daher w_1 ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$. $w_1^{\frac{\pi}{\alpha}}$ bedeute $e^{\frac{\pi}{\alpha}\log w_1}$, wo der log den Hauptwert hat. Die Bildschranken für $f'(z)$ erhalten wir dann durch

$$\varphi(z)=\varphi_{\mathfrak{G}}(z; w_1)=\left(\frac{w_1^{\frac{\pi}{\alpha}}+z\,\overline{w}_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1-z}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \tag{2}$$

[3] Siehe etwa E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin bei Julius Springer (1916), S. 89–90.

unter der rechten Seite von (2) ebenfalls den analogen Hauptwert verstanden. Für $|z| = \varrho < 1$ ist aber offenbar gleichmäßig in den ϱ

$$\varphi(z) = O\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \tag{3}$$

also erst recht

$$f'(z) = O\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \tag{4}$$

und radial integriert

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(\zeta)\, d\zeta = f(0) + O\int_0^1 \left(\frac{1}{1-\varrho}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} d\varrho = O(1). \tag{5}$$

Auf gleichem Wege kann man sich überzeugen, daß der Winkelraum in Satz I auch durch einen Parallelstreifen ersetzt werden kann; ferner darf z. B. statt $f'(z)$ auch $zf'(z)$ genommen werden.

Daß der Satz für $\alpha = \pi$ nicht mehr gilt, zeigt das einfache Beispiel

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z) \qquad (|z| < 1).$$

§ 2.

Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6}$$

eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe. Das Schwarzsche Lemma hat uns in § 1 unter gewissen Voraussetzungen Bildschranken für $f(z)$ geliefert. Betrachten wir dagegen den m-ten Abschnitt von $f(z)$

$$s_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

so kann uns das Schwarzsche Lemma nicht helfen; denn schon unter dessen einfachen Voraussetzungen steht die Abbildung durch $s_m(z)$ in keinem erkennbaren Zusammenhange mit der speziellen Funktion $\varphi(z) \equiv z$, die für die Bilder durch $f(z)$ selbst schrankengebend ist. Hat doch für die Klasse $(\mathfrak{E})$ der $f(z)$ mit $|f(z)| \leqq 1$ Herr Fejér[4]) gezeigt, daß die $s_m(z)$ für $|z| \leqq 1$ in ihrer Gesamtheit keineswegs gleichmäßig beschränkt zu sein brauchen, während die Abschnitte von $\varphi(z)$ für $m \geqq 1$ sämtlich $\equiv z$ sind. Es gibt sogar in $|z| \leqq 1$ stetige $f(z)$ aus $(\mathfrak{E})$, bei

[4]) L. Fejér, Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Münchener Akad. Berichte 1910, 3. Abh.

denen die Zahlen $s_m(1) = \sum_{n=0}^{m} a_n$ nicht beschränkt sind[5]). Herr Landau[6]) hat sodann für $(\mathfrak{E})$ die obere Grenze G_m von $|s_m(1)|$ mit

$$(8) \quad G_m = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\ldots 2m}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi}\log m \text{ [7])}$$

wirklich bestimmt. Nur dann wird $|s_m(1)| = G_m$, wenn $f(z)$ die Form

$$(9) \qquad f(z) = \varepsilon \frac{z^m P_m\left(\frac{1}{z}\right)}{P_m(z)}; \qquad P_m(z) = \sum_{n=0}^{m} \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n; \qquad |\varepsilon| = 1$$

hat.

Um so merkwürdiger ist es, daß bei einer anderen wichtigen Potenzreihenklasse, nämlich den für $|z| < 1$ einseitig beschränkten $f(z)$, die m-ten Abschnitte des speziellen $\varphi(z)$ der jeweiligen Funktionenklasse nun selbst wiederum Bildschranken für die $s_m(z)$ liefern.

Man kann nämlich das Wesentliche der schönen Ergebnisse der Theorie dieser $f(z)$, wie man sie insbesondere den Herren Carathéodory[2]), Schur[8]) und Toeplitz[9]) verdankt, für unsere Zwecke folgendermaßen interpretieren[10]).

[5]) Vgl. das Buch unter [3]), S. 23–25.

[6]) E. Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (2. Abh.). Arch. d. Math. u. Phys. (3) **21** (1913), S. 250–255; vgl. auch das Buch unter [3]), S. 20–23.

[7]) G_0 soll 1 bedeuten.

[8]) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal f. Math. **147** (1917), S. 205–232 und **148** (1918), S. 128–145; ferner: Über die Koeffizientensumme einer Potenzreihe mit positivem reellen Teil, Arch. d. Math. u. Phys. (3) **27** (1918), S. 126–135. Insbesondere enthält der Schlußsatz III dieser Arbeit implizit unsere Sätze II und IV.

[9]) O. Toeplitz, Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen, Palermo Rend. **32** (1911), S. 191–192.

[10]) Daß es sich wirklich nur um eine Interpretation (aus dem $2m$-Dimensionalen bei Carathéodory) ins Zweidimensionale handelt, erkennt man leicht durch die folgende direkte Ableitung unserer Behauptung II aus dem Carathéodoryschen Theorem, wie ich sie einer Mitteilung des Herrn H. Kneser in Göttingen verdanke. Mit den Bezeichnungen der unter [2]) zuerst zitierten Arbeit, § 5, S. 109, Formel (33) gilt, wenn noch, was unwesentlich ist, a_0 zu 1 spezialisiert wird, für alle $1 \leqq n \leqq m$

$$a_n = 2\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j e^{-in\vartheta_j}, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \vartheta_j = \vartheta_j(m) \leqq 2\pi, \quad \lambda_j = \lambda_j(m) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \text{ ist.}$$

Also wird:

$$s_m(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j e^{-in\vartheta_j} z^n = 1 + 2\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j \sum_{n=1}^{m} z_j^n \qquad (z_j = z e^{-i\vartheta_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j (1 + 2\sum_{n=1}^{m} z_j^n) = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j S_m(z_j),$$

was genau die arithmetische Formulierung unserer Behauptung II ist.

Satz II. *In der Gesamtheit* $(\mathfrak{F})$ *der Funktionen* $f(z)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ist für* $|z|<1$ *regulär,*

2. *alle* $f(z)$ *haben dasselbe* $f(0)=a_0$ *gemeinsam,*

3. *für* $|z|<1$ *ist* $u(z)=\Re f(z)\geqq 0$,

gibt es eine und bis auf eine Drehungstransformation in z *nur eine Funktion*

$$F(z)\equiv \varphi(z;a_0)=\frac{a_0+z\bar{a}_0}{1-z} \qquad \begin{pmatrix}|z|<1,\\ \alpha_0=\Re a_0\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$=a_0+2\alpha_0\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n,$$

die folgendes leistet:

I. *Es ist für alle* n

$$|a_n|\leqq |A_n|.$$

II. *Das Bild eines jeden Kreises* $|z|=\varrho$ *durch ein* $s_m(z)$ *liegt in der konvexen Hülle*[11]) *seines Bildes durch* $S_m(z)=\sum_{n=0}^{m}A_n z^n$.

III. *Für* $\varrho<1$ *liegt das Bild eines jeden Kreises* $|z|=\varrho$ *durch ein* $f(z)$ *ganz innerhalb seines Bildes durch* $F(z)$ *(ein Kreis). Nur die Funktionen*

$$f(z)=F(ze^{i\vartheta}) \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

erreichen diese Bildschranken.

Beweis. Behauptung III ist bereits in § 1 voll bewiesen.

Zu I. Wir setzen $a_n=\alpha_n+i\beta_n$ und benutzen die bekannten Fourierformeln

$$\text{a)}\quad \alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\,d\vartheta \qquad (0<\varrho<1;\ n=1,2,\ldots)$$

(11)

$$\text{b)}\quad \alpha_n=\frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\cos n\vartheta\,d\vartheta;\quad \beta_n=-\frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\sin n\vartheta\,d\vartheta$$

oder

$$a_n=\frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)e^{-in\vartheta}\,d\vartheta \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{12}$$

Hieraus folgt sofort

$$|a_n|\leqq\frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\,d\vartheta=\frac{2\alpha_0}{\varrho^n}$$

[11]) Unter der konvexen Hülle einer Punktmenge ist die kleinste abgeschlossene konvexe Punktmenge verstanden, die sie enthält. Kenntnis ihrer elementaren Eigenschaften (Definition durch Stützgeraden usw.) wird vorausgesetzt.

und mit $\varrho \to 1$

$$|a_n| \leqq 2a_0 = A_n. \tag{13}$$

Für $n = 0$ ist aber $a_0 = A_0$.

Zu II. Es sei $\varrho > 0$ beliebig und $0 < \varkappa\varrho < 1$. Aus (12) folgt, indem man ϱ durch $\varkappa\varrho$ ersetzt, für $m \geqq 1$ und jedes reelle ϑ_0

$$s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = a_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varkappa\varrho, \vartheta)\cdot 2\sum_{n=1}^{m}\frac{e^{in(\vartheta_0-\vartheta)}}{\varkappa^n}\,d\vartheta. \tag{14}$$

Der Weierstraßsche Mittelwertsatz[12]) ergibt hieraus unmittelbar

$$s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = a_0 + 2a_0\zeta,$$

wo ζ ein Punkt der konvexen Hülle von $\sum_{n=1}^{m} z^n$ für $|z| = \frac{1}{\varkappa}$ ist. Mit $\varkappa \to \frac{1}{\varrho}$ ist daher

$$s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = a_0 + 2a_0\zeta_1, \tag{15}$$

wo ζ_1 jetzt ein Punkt der konvexen Hülle von $\sum_{n=1}^{m} z^n$ für den Kreis $|z| = \varrho$ ist. Das ist aber genau die Behauptung, deren Richtigkeit für $m = 0$ selbstverständlich ist.

Eine wichtige Ergänzung zu Satz II ist der

Satz III. *Es sei $\varrho > 0$ beliebig aber fest gewählt. w sei bei festem m ein beliebiger Randpunkt der konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z| = \varrho$ durch $S_m(z)$. Dann gibt es zu jedem Argument ϑ_0 eine und nur eine Funktion in $(\mathfrak{F})$ mit $s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = w$. Diese Funktion ist von der Gestalt*

$$f(z) = tF_i(z) + (1-t)F_k(z), \tag{16}$$

wo

$$0 \leqq t \leqq 1; \quad F_j(z) = F(ze^{i\vartheta_j})$$

ist und die ϑ_i, ϑ_k gewisse wohl bestimmte Argumente sind.

Beweis. A. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\vartheta_0 = 0$ gewählt. Wir ordnen w irgendeine der Stützgeraden der Bildkurve des Kreises $|z| = \varrho$ durch $S_m(z)$ zu, auf der es als Randpunkt der konvexen Hülle liegen muß. Die Kurve wird mit dieser Geraden offenbar nur eine endliche Anzahl von Punkten $w_1, \ldots, w_p$ gemeinsam haben, zu denen die Argumente $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$ gehören mögen, so daß also

$$S_m(\varrho e^{i\vartheta_j}) = w_j \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

wird. Einzelne der w_j können auch zusammenfallen.

---

[12]) Vgl. etwa W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig und Berlin bei Teubner (1912), Bd. 1, S. 212–213.

Im Falle $p = 1$ oder wenn alle w_j zusammenfallen, muß notwendig $w = w_1$, also $S_m(\varrho e^{i\vartheta_1}) = w$ sein. Betrachtet man nun statt $F(z)$ die ebenfalls zu $(\mathfrak{F})$ gehörigen Funktionen $F_j(z) = F(ze^{i\vartheta_j})$, so wird dann insbesondere für die Funktion $F_1(z)$

$$S_{1,m}(\varrho) = S_m(\varrho e^{i\vartheta_1}) = w. \tag{17}$$

Überhaupt ist stets $S_{j,m}(\varrho) = w$, wenn $w = w_j$ ist, und dies entspricht (16) für $t = 0$ oder auch 1.

Gibt es wenigstens zwei verschiedene w_j, so wird man zu jedem von den w_j verschiedenen auf der betrachteten Stützgerade gelegenen Randpunkte w der konvexen Hülle mindestens auf eine Weise zwei Punkte w_i und w_k finden können, so daß w im Innern der endlichen Strecke von w_i nach w_k liegt. Die Funktion

$$f(z) = tF_i(z) + (1-t)F_k(z) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

gehört nun offenbar ebenfalls zu $(\mathfrak{F})$, und es ist für sie

$$s_m(\varrho) = tS_{i,m}(\varrho) + (1-t)S_{k,m}(\varrho) = tw_i + (1-t)w_k.$$

Man braucht also nur

$$t = \left| \frac{w - w_k}{w_i - w_k} \right| \tag{18}$$

zu setzen, damit

$$s_m(\varrho) = w$$

wird.

B. Der Beweis für die Eindeutigkeitsbehauptung kann ganz analog zum entsprechenden Beweise beim Carathéodoryschen Problemkreise[13]) durchgeführt werden, so daß ich mich begnügen will, kurz den Anschluß an diesen zu weisen.

Es sei $-\frac{\pi}{2} < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ und die betrachtete Stützgerade, auf der unser Randpunkt w liegt, bilde mit der reellen Achse der w-Ebene den Winkel $\frac{\pi}{2} + \psi$. Unter $a^{(\psi)}$ verstehe man für beliebiges komplexes a den $\Re(ae^{-i\psi})$, d. h. also eine orientierte Projektion von a auf die Gerade des Arguments ψ durch den Koordinatenanfang.

Aus (14) ergibt sich sofort für $0 < \varkappa\varrho < 1$ und $m \geqq 1$

$$s_m(\varrho)^{(\psi)} = a_0^{(\psi)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varkappa\varrho, \vartheta) \cdot 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{\cos(n\vartheta + \psi)}{\varkappa^n}\, d\vartheta. \tag{19}$$

---

[13]) Vergl. die unter [2]) zuerst zitierte Arbeit, S. 101—109, insbesondere § 4 auf S. 107—109. Unsere Formel (20) tritt beim Beweise an die Stelle der Formel (25) auf S. 104 daselbst.

Ersetzt man hierin, bei $0 < \lambda < 1$, ϱ durch $\lambda\varrho$ und $\varkappa$ durch $\frac{1}{\varrho}$, so wird

$$(20) \qquad s_m(\lambda\varrho)^{(\psi)} = a_0^{(\psi)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\lambda, \vartheta)\cdot 2\sum_{n=1}^{m} \varrho^n \cos(n\vartheta + \psi)\, d\vartheta.$$

Von dieser Formel ausgehend, wird man jederzeit mit leichter Mühe an Hand der unter [13]) gemachten Literaturangabe den Beweis zu Ende verfolgen können.

Es ergibt sich eine Darstellung für jedes $f(z)$, für welches $s_m(\varrho) = w$ wird, notwendig in der Gestalt

$$(21) \qquad f(z) = \sum_{j=1}^{p} l_j F_j(z),$$

wobei p und die $F_j(z)$ die Bedeutung aus A haben und die l_j gewisse, den Bedingungen

$$(22) \qquad 0 \leqq l_j \leqq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{p} l_j = 1$$

genügende Konstanten sind. Diese Darstellung erweist sich zugleich als eindeutig durch den Randpunkt w bestimmt.

Für uns lehrt B noch nachträglich, daß in A

$$p = 1 \quad \text{oder} \quad p = 2 \quad \text{mit} \quad w_1 \neq w_2$$

sein muß, weil eben sonst die daselbst angegebene Konstruktion des $f(z)$ nicht eindeutig wäre.

§ 3.

Es sei nunmehr

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine beliebige für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, $\varrho > 0$ beliebig und $0 < \varkappa\varrho < 1$.

Man kann nun in Anwendung des Satzes II den Kreis $|z| = \varkappa\varrho$ die Rolle des Einheitskreises und jede beliebige Stützgerade seines Bildes durch $f(z)$ die Rolle der Geraden $u = 0$ spielen lassen. Denn die Aussagen jenes Satzes hängen natürlich nicht von der speziellen daselbst gewählten einseitigen Beschränktheit von $f(z)$ ab, sondern lassen sich vielmehr geometrisch invariant deuten; man braucht nur an die Bedeutung von $F(z)$ als $\varphi(z; a_0)$ zu denken und $A_n = 2\alpha_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ als den doppelten Abstand des ausgezeichneten Punktes a_0 von der Beschränkungsgeraden $u = 0$ aufzufassen. Man erhält so recht scharfe Aussagen über die Gebiete, auf welche die Abbildung eines Kreises $|z| = \varrho$ durch $f(z)$ bzw. die $s_m(z)$ notwendig beschränkt bleiben muß.

Begnügt man sich insbesondere bei der Auswertung des Satzes II mit den beiden zu $u = 0$ parallelen Stützgeraden der jeweiligen Bildkurve durch $S_m(z)$, so gelangt man zu einigen allgemeinen Potenzreihensätzen von besonders einfacher Gestalt.

Die genannten Stützgeraden bezüglich des Kreises $|z| = \varrho$ sind doch bestimmt durch

$$u = \alpha_0(1 - \mathfrak{m}_m(\varrho)) \quad \text{bzw.} \quad u = \alpha_0(1 + \mathfrak{M}_m(\varrho)), \tag{23}$$

wo $-\mathfrak{m}_m(\varrho)$ bzw. $\mathfrak{M}_m(\varrho)$ das kleinste Minimum bzw. das größte Maximum von

$$2\sum_{n=1}^{m} \varrho^n \cos n\vartheta$$

bezüglich ϑ bezeichnet. Hierbei ist zunächst

$$\mathfrak{M}_m(\varrho) = 2\sum_{n=1}^{m} \varrho^n = \frac{2\varrho(1-\varrho^m)}{1-\varrho}, \tag{24}$$

so daß also für $\varrho < 1$, indem die $\mathfrak{M}_m(\varrho)$ mit m wachsen,

$$\lim_{m\to\infty} \mathfrak{M}_m(\varrho) = \frac{2\varrho}{1-\varrho} \tag{25}$$

wird. Im übrigen ist

$$\mathfrak{M}_m(1) = 2m, \tag{26}$$

d. h. in der Richtung von der Beschränkungsgeraden $u = 0$ fort wachsen die bezüglich des Kreises $|z| = 1$ genommenen konvexen Hüllen der $S_m(z)$ wie $2m$ ins Unendliche.

Um nun die eingangs dieses Paragraphen angedeutete allgemeine Anwendung zu machen, hat man nur in $f(z)$ die Variable mittels $z' = \frac{z}{\varkappa\varrho}$ zu transformieren, so daß nunmehr dem Kreise $|z| = \varrho$ der Kreis $|z'| = \frac{1}{\varkappa}$ entspricht. So erhalten wir unmittelbar aus (24) und (25)

Satz II, 1. *Für jedes $\varrho > 0$ liegt das Bild des Kreises $|z| = \varrho$ durch $s_m(z)$ ganz innerhalb der um a_0 durch 180^0 gedrehten und im Verhältnis $\frac{2(\varkappa^m - 1)}{\varkappa^m(\varkappa - 1)} : 1$ vom Zentrum a_0 gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z| = \varkappa\varrho$ durch $f(z)$. Diese Bildschranken wachsen mit m.*

Satz II, 2. *Für $\varkappa > 1$ (also $\varrho < \frac{1}{\varkappa} < 1$ wegen $\varkappa\varrho < 1$) liegen die Bilder eines Kreises $|z| = \varrho$ durch sämtliche Abschnitte und daher auch durch $f(z)$ selbst ganz innerhalb der um a_0 durch 180^0 gedrehten und im Verhältnis $\frac{2}{\varkappa - 1} : 1$ vom Zentrum a_0 gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z| = \varkappa\varrho$ durch $f(z)$.*

Wesentlich interessanter wird die Betrachtung der $\mathfrak{m}_m(\varrho)$, die wir bald für $\varrho = \frac{1}{\varkappa}$ durchführen wollen. Es ist doch

$$2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta}{\varkappa^n} = \sum_{n=1}^{m}\frac{e^{in\vartheta}+e^{-in\vartheta}}{\varkappa^n} = \frac{1}{\varkappa^m}\left\{\frac{e^{i(m+1)\vartheta}-\varkappa^m e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}-\varkappa}+\frac{e^{-i(m+1)\vartheta}-\varkappa^m e^{-i\vartheta}}{e^{-i\vartheta}-\varkappa}\right\}$$

$$= \frac{2}{\varkappa^m}\,\frac{\varkappa^{m+1}\cos\vartheta+\cos m\vartheta-\varkappa^m-\varkappa\cos(m+1)\vartheta}{1-2\varkappa\cos\vartheta+\varkappa^2},$$

$$1+2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta}{\varkappa^n} = \frac{\varkappa^{m+2}-\varkappa^m+2(\cos m\vartheta-\varkappa\cos(m+1)\vartheta)}{\varkappa^m(1-2\varkappa\cos\vartheta+\varkappa^2)}. \tag{27}$$

Wenn also

$$\varkappa^m(\varkappa-1)\geqq 2$$

oder, was dasselbe besagt, bei $\varkappa>1$

$$m \geqq \frac{\log 2-\log(\varkappa-1)}{\log\varkappa} \tag{28}$$

gewählt wird, so ist

$$1+2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta}{\varkappa^n} \geqq \frac{\varkappa^m(\varkappa-1)-2}{\varkappa^m(\varkappa+1)}. \tag{29}$$

Insbesondere wird für ungerades m unter der Bedingung (28) das Minimum (29) bei $\vartheta=\pi$ wirklich angenommen, so daß für diese m und $\varkappa$ sogar genau

$$\mathfrak{m}_m\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = -\left(\frac{\varkappa^m(\varkappa-1)-2}{\varkappa^m(\varkappa+1)}-1\right) = \frac{2(\varkappa^m+1)}{\varkappa^m(\varkappa+1)} \tag{30}$$

wird. Die rechte Seite von (30) nimmt mit m ab, und es ergibt sich für alle $\varkappa>1$

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}_m\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = \frac{2}{\varkappa+1}. \tag{31}$$

Es ergibt sich nunmehr aus (23) bzw. (28) und (29)

Satz II, 3. *Für jedes $\varrho>0$ liegt das Bild des Kreises $|z|=\varrho$ durch $s_m(z)$ ganz innerhalb der im Verhältnis $\mathfrak{m}_m\left(\frac{1}{\varkappa}\right):1$ vom Zentrum a_0 gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z|=\varkappa\varrho$ durch $f(z)$. Hierbei ist $-\mathfrak{m}_m\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ das kleinste Minimum von $2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta}{\varkappa^n}$ bezüglich ϑ.*

Satz II, 4. *Für $\varkappa>1$ (also gewiß $\varrho<1$) und $m\geqq\frac{\log 2-\log(\varkappa-1)}{\log\varkappa}$ liegt das Bild des Kreises $|z|=\varrho$ durch $s_m(z)$ ganz innerhalb der im Verhältnis $\frac{2(\varkappa^m+1)}{\varkappa^m(\varkappa+1)}:1$ vom Zentrum a_0 gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z|=\varkappa\varrho$ durch $f(z)$. Diese Bildschranken nehmen mit m ab.*

Ganz besonders einfach ist der Spezialfall von II, 4:

Satz II, 5. *Für* $\varkappa \geqq 2$ (*also gewiß* $\varrho < \frac{1}{2}$) *liegen die Bilder des Kreises* $|z| = \varrho$ *durch sämtliche Abschnitte ganz innerhalb der im Verhältnis* $\frac{2}{\varkappa} : 1$ *vom Zentrum* a_0 *gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises* $|z| = \varkappa\varrho$ *durch* $f(z)$.

Schließlich erhalten wir noch aus (31) den nützlichen

Satz II, 6. *Für* $\varkappa \geqq 1$ *liegt das Bild des Kreises* $|z| = \varrho$ *durch* $f(z)$ *ganz innerhalb der im Verhältnis* $\frac{2}{\varkappa + 1} : 1$ *vom Zentrum* a_0 *gestreckten konvexen Hülle des Bildes des Kreises* $|z| = \varkappa\varrho$ *durch* $f(z)$.

Die Bestimmungsart der angegebenen Bildschranken durch das spezielle $F(z)$ des Satzes II zeigt noch zugleich, daß die in den eben aufgestellten Sätzen angegebenen jeweiligen Streckungsverhältnisse in bezug auf die Gesamtheit aller $f(z)$ und $\varkappa$ nicht verbessert[14]) werden können; wenn nur $\varkappa\varrho$ genügend nahe unter 1 liegt, so lehrt dies schon das Beispiel von $F(z)$ selbst.

Zum Schlusse dieses Paragraphen sei noch in Analogie zur oberen Grenze G_m in (8) die zuerst von Herrn Schur[15]) gezeigte Relation

$$\mathfrak{m}_m(1) \sim -2m\cos\vartheta_0 \tag{32}$$

erwähnt, wo ϑ_0 die in $0 < \vartheta < 2\pi$ gelegene Lösung von $\operatorname{tg}\vartheta = \vartheta$ ist. Sie zeigt uns, daß auch über die Beschränkungsgerade $u = 0$ hinaus die konvexen Hüllen der $S_m(z)$ bezüglich des Kreises $|z| = 1$ ins Unendliche wachsen, und zwar wie konst. $\cdot\, m$.

§ 4.

Wir wollen jetzt unsere Betrachtungen insofern etwas ändern, als wir zur Bestimmung von Bildschranken für $f(z)$ und die $s_m(z)$ nicht mehr $f(z)$ selbst, sondern seine Ableitung $f'(z)$ heranziehen. Genauer gesagt werden wir $zf'(z)$ betrachten, wodurch eine sonst unvermeidliche Bevorzugung des Koeffizienten $a_1 = f'(0)$ vermieden wird und sich auch rechnerische Vorzüge ergeben. Überhaupt wird diese ganze neue Wendung gegenüber dem § 3 den Vorteil haben, daß die Formulierung der so zu gewinnenden Resultate weit durchsichtiger und besonders bei $\varkappa \to 1$ auch brauchbarer wird.

Den Ausgangspunkt bildet hier folgendes Analogon zum Satze II des § 2, das auch an sich Interesse verdienen dürfte[16]):

---

[14]) Bei Satz II, 4 gilt dies wenigstens für ungerades m.

[15]) Siehe die zweite Arbeit unter [8]), S. 128.

[16]) Vgl. die Schlußbemerkung unter [8]).

Satz IV. *In der Gesamtheit* $(\mathfrak{H})$ *der Funktionen* $f(z)$ *mit folgenden Eigenschaften*:

1. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ist für* $|z|<1$ *regulär,*
2. *alle* $f(z)$ *haben dasselbe* $f(0)=a_0$ *gemeinsam,*
3. *für* $|z|<1$ *ist* $\Re(zf'(z))\geqq -1$,

gibt es eine und bis auf eine Drehungstransformation in z *nur eine Funktion*

$$H(z)=a_0-2\log(1-z) \tag{33}$$
$$=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n \qquad (|z|<1),$$

die folgendes leistet:

I. *Es ist für alle* n

$$|a_n|\leqq|B_n|.$$

II. *Das Bild eines jeden Kreises* $|z|=\varrho$ *durch ein* $s_m(z)$ *liegt in der konvexen Hülle seines Bildes durch* $\mathfrak{S}_m(z)=\sum_{n=0}^{m}B_n z^n$.

III. *Für* $\varrho<1$ *liegt das Bild eines jeden Kreises* $|z|=\varrho$ *durch ein* $f(z)$ *ganz innerhalb seines Bildes durch* $H(z)$. *Nur die Funktionen*

$$f(z)=H(ze^{i\vartheta}) \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

erreichen diese Bildschranken.

Beweis. Zunächst gehört $H(z)$ wirklich zu $(\mathfrak{H})$, denn es erfüllt offenbar 1. und 2. und wegen

$$zH'(z)=\frac{2z}{1-z} \tag{34}$$

auch 3.

Aus den Fourierformeln (11a), (12) und (14), angewendet auf

$$zf'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^n \qquad (|z|<1), \tag{35}$$

folgt sofort unter Beachtung von

$$\int_0^{2\pi}e^{in\vartheta}\,d\vartheta=\begin{cases}2\pi & \text{für } n=0\\ 0 & n=1,2,\ldots\end{cases} \tag{36}$$

die Formelgruppe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Re(zf'(z))+1\right)d\vartheta=1, \tag{37}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi\varrho^n n}\int_0^{2\pi}\left(\Re(zf'(z))+1\right)e^{-in\vartheta}\,d\vartheta \qquad \begin{pmatrix}0<\varrho<1,\ z=\varrho e^{i\vartheta}\\ n=1,2,\ldots\end{pmatrix} \tag{38}$$

und

$$(39) \qquad s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = a_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\Re\left(zf'(z)\right)+1\right) 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{e^{in(\vartheta_0-\vartheta)}}{n z^n}\, d\vartheta$$

$$(\varrho > 0, \quad 0 < \varkappa\varrho < 1; \qquad z = \varkappa\varrho e^{i\vartheta}, \quad m = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus ergeben sich aber, genau wie bei Satz II, sofort die Behauptungen I und II.

Die Behauptung III kann hier nicht unmittelbar aus dem Schwarzschen Lemma gefolgert werden. Jedoch lehrt bereits die Behauptung II mit $m \to \infty$, daß für $\varrho < 1$ das Bild eines jeden Kreises $|z| = \varrho$ durch ein $f(z)$ jedenfalls innerhalb der konvexen Hülle seines Bildes durch $H(z)$ liegt. Wir werden also noch zu zeigen haben, daß dieses Bild durch $H(z)$ selbst konvex, d. h. sein abgeschlossenes Inneres mit seiner konvexen Hülle identisch ist.

Nun ist für unseren Zweig des log bei $|z| = \varrho < 1$

$$(40) \qquad \log(1-z) = \log|1-z| + i \operatorname{arc}(1-z) = u + iv,$$

mit

$$(41) \qquad \log(1-\varrho) \leqq u \leqq \log(1+\varrho); \qquad |v| \leqq \operatorname{arc}\sin\varrho < \frac{\pi}{2}.$$

Ferner ergibt der Kosinussatz sofort

$$(42) \qquad \cos v = \frac{1+|1-z|^2-\varrho^2}{2|1-z|} = \frac{1+e^{2u}-\varrho^2}{2e^u},$$

also als Gleichung der Bildkurve des Kreises $|z| = \varrho$ durch $\log(1-z)$

$$(43) \qquad 2\cos v = e^u + (1-\varrho^2)e^{-u}.$$

Wir beweisen, daß diese Kurve konvex ist, indem wir zeigen, daß sie mit jeder Geraden $u = av + b$ und $v = \text{konst.}$ höchstens zwei reelle Punkte gemeinsam hat.

Für $u = \text{konst.}$ (d. h. $a = 0$) ist dies aus (41) und (43) evident, für $v = \text{konst.}$ erhalten wir eine quadratische Gleichung in e^u.

Setzt man schließlich für $a \neq 0$

$$g(v) = e^{av+b} + (1-\varrho^2)e^{-(av+b)},$$

so ist überall

$$(44) \qquad g''(v) = a^2 g(v) > 0.$$

Da aber andererseits innerhalb des durch (41) gegebenen v-Intervalls

$$\cos'' v = -\cos v < 0$$

ist und ein konvexes und ein konkaves Kurvenstück höchstens zwei Schnittpunkte haben, ist jetzt die Konvexität unserer Bildkurve (43), also auch der durch $H(z)$ gelieferten für $|z| = \varrho < 1$ allgemein bewiesen.

Daß nur $f(z) = H(ze^{i\vartheta})$ die gebotenen Bildschranken wirklich erreicht, folgt jetzt aus dem Schwarzschen Lemma gemäß § 1, indem man als Gebiet $\mathfrak{G}$ den Bildbereich von $|z| < 1$ durch $H(z)$ wählt, für den $H(z) \equiv \varphi_{\mathfrak{G}}(z; a_0)$ ist.

Dem Satze III des § 2 entspricht hier der analoge

Satz V. *Es sei $\varrho > 0$ beliebig aber fest gewählt. w sei bei festem m ein beliebiger Randpunkt der konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z| = \varrho$ durch $\mathfrak{S}_m(z)$. Dann gibt es zu jedem Argument ϑ_0 eine und nur eine Funktion in $(\mathfrak{H})$ mit $s_m(\varrho e^{i\vartheta_0}) = w$. Diese Funktion ist von der Gestalt*

$$f(z) = t\,H_j(z) + (1-t)\,H_k(z), \tag{45}$$

wo

$$0 \leqq t \leqq 1; \qquad H_j(z) = H(ze^{i\vartheta_j})$$

ist, und die ϑ_j, ϑ_k gewisse wohl bestimmte Argumente sind.

Zum Beweise bemerke man nur, daß wegen

$$z\,H_j'(z) = z\,e^{i\vartheta_j}\frac{dH(ze^{i\vartheta_j})}{d(ze^{i\vartheta_j})}. \tag{46}$$

auch $H_j(z)$ zu $(\mathfrak{H})$ gehört. Im übrigen läßt er sich in sinngemäßer Analogie zu dem des Satzes III ohne weiteres durchführen.

Auch der Satz IV ist, losgelöst von seinen speziellen Beschränkungsvoraussetzungen, im Sinne des § 3 geometrisch invariant zu deuten, wenn man die Bedeutung von $zH'(z)$ als $\varphi_{\mathfrak{G}}(z; 0)$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ ($u \geqq -1$ in der $w = u + iv$-Ebene) erkennt und $nB_n = 2$ $(n = 1, 2 \ldots)$ als doppelten Abstand des ausgezeichneten Punktes 0 von der Beschränkungsgeraden $u = -1$ auffaßt.

Die zu dieser letzteren parallelen Stützgeraden des Bildes eines Kreises $|z| = \varrho$ durch $\mathfrak{S}_m(z)$ sind jetzt bestimmt durch

$$u = \alpha_0 - \mu_m(\varrho) \quad \text{bzw.} \quad u = \alpha_0 + \mathsf{M}_m(\varrho), \tag{47}$$

wo $-\mu_m(\varrho)$ bzw. $\mathsf{M}_m(\varrho)$ das kleinste Minimum bzw. das größte Maximum von

$$2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta}{n}\varrho^n$$

bezüglich ϑ bezeichnet. Hierbei ist zunächst

$$\mathsf{M}_m(\varrho) = 2\sum_{n=1}^{m}\frac{\varrho^n}{n} \tag{48}$$

und für $\varrho < 1$, indem die $\mathsf{M}_m(\varrho)$ mit m wachsen,

$$\lim_{m\to\infty}\mathsf{M}_m(\varrho) = 2\log\left(\frac{1}{1-\varrho}\right). \tag{49}$$

Insbesondere ist

$$\mathsf{M}_m(1) = 2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} \sim 2\log m. \tag{50}$$

Ferner ist über die $\mu_m(\varrho)$ bekannt[17]), daß

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_m(1) = -2\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos n\vartheta_1}{n} \\ \text{mit} \quad \vartheta_1 = \begin{cases} \pi & \\ \frac{\pi m}{m+1} & \end{cases}, \text{ wenn } m \begin{array}{l}\text{ungerade} \\ \text{gerade}\end{array} \text{ ist,} \end{array}\right. \tag{51}$$

daß ferner stets

$$\mu_m(1) \leqq 2 \tag{52}$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\mu_m(1) = \log 4 \tag{53}$$

wird.

Über die Beschränkungsgerade $u = -1$ hinaus bleiben also diesmal die schrankengebenden konvexen Hüllen für $|z| = 1$ gleichmäßig beschränkt, während sie in der Richtung von ihr fort gemäß (50) wie $2\log m$ ins Unendliche wachsen. (53) ist natürlich nur ein Spezialfall der allgemeineren für $\varrho \leqq 1$ gültigen Relation

$$\lim_{m\to\infty}\mu_m(\varrho) = 2\log(1+\varrho), \tag{54}$$

die unmittelbar aus (33) und (41) folgt.

Es lohnt sich, noch die zu $u = -1$ vertikalen Stützgeraden zu betrachten. Sie sind bestimmt durch

$$v = \beta_0 \pm M_m(\varrho), \tag{55}$$

wo $M_m(\varrho)$ das größte Maximum von

$$2\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin n\vartheta}{n}\varrho^n$$

bezüglich ϑ bezeichnet. Hier ist bekanntlich[18])

$$M_m(1) = 2\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m+1}}{n}. \tag{56}$$

---

[17]) W. H. Young, On certain series of Fourier, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2) **11** (1913), S. 357—366.

[18]) T. H. Gronwall, Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$, Math. Annalen 72 (1912), S. 228—243.

$M_m(1)$ wächst mit m, und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} M_m(1) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 3{,}703872\ldots . \tag{57}$$

Aus (52) und (57) erhalten wir also noch den für unsere Funktionsklasse wichtigen

Satz VI. *Für alle $f(z)$ aus $(\mathfrak{H})$ sind die $\Im(s_m(z))$ in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkt, die $\Re(s_m(z))$ gleichmäßig nach unten beschränkt.*

Die Existenz dieses Satzes macht die eben entwickelte Theorie der Funktionsklasse $(\mathfrak{H})$ für unsere Zwecke besonders geeignet. Von den möglichen Anwendungen auf ein beliebiges $f(z)$ (im Sinne des § 3) formulieren wir nur als besonders einfach und durchsichtig aus (52) bzw. (54)

Satz IV, 1. *Alle Abschnitte für $|z|\leqq\varrho<1$ liegen innerhalb der konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z|=\varrho$ durch $a_0+2zf'(z)$.*

Satz IV, 2. *Für $\varkappa\geqq 1$ liegt das Bild des Kreises $|z|=\varrho$ durch $f(z)$ ganz innerhalb der konvexen Hülle des Bildes des Kreises $|z|=\varkappa\varrho$ durch $a_0+2\log\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\,zf'(z)$.*

Zum Schlusse sei bemerkt, daß in Satz VI offenbar ein neuer Beweis für Satz I liegt, wenn in dessen Voraussetzung $f'(z)$ durch $zf'(z)$ ersetzt wird. Aber auch in der ursprünglichen Fassung läßt er sich auf ähnlichem Wege noch beweisen.

Breslau, den 5. August 1922.

(Eingegangen am 8. August 1922.)

Über einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz.

Von

W. Jänichen in Berlin.

Einleitung.

L. E. Dickson hat im 135. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik (1909, S. 134 und S. 181) den Satz bewiesen:

Die Kongruenz

$$x^l + y^l \equiv z^l \pmod{p},$$

wobei l eine Primzahl ist, läßt sich durch ganzzahlige, durch p nicht teilbare Zahlen x, y, z lösen, falls p eine gewisse, nur von l abhängende Schranke übersteigt[1]).

Damit ist gezeigt, daß man diese Kongruenz nicht zum Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $x^l + y^l = z^l$ des großen Fermatschen Satzes benutzen kann.

A. Hurwitz hat nun den obigen Satz im 136. Bande desselben Journals (1909, S. 272) weiter verallgemeinert und folgenden Satz bewiesen:

Es seien a, b, c ganze von Null verschiedene Zahlen, l eine ungerade Primzahl. Dann besitzt die Kongruenz

$$(1) \qquad ax^l + by^l + cz^l \equiv 0 \pmod{p}$$

für jede Primzahl p, die eine gewisse Grenze übersteigt, eine solche Lösung, für welche keine der drei Zahlen x, y, z durch p teilbar ist.

Zum Beweis stützt sich Hurwitz nicht wie Dickson auf die Theorie der Kreisteilung, sondern benutzt lediglich elementare zahlentheoretische Hilfsmittel. Dieses Hurwitzsche Resultat steht nun in enger Beziehung zu den Ergebnissen meiner Königsberger Dissertation[2]), die

[1]) Vgl. auch G. Cornacchia: Sulla congruenze $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$, Giorn. di mat. **47** (1909), S. 219–268, und I. Schur: Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$, Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. **25** (1916), S. 114–117.

[2]) W. Jänichen: Über eine Anwendung der Kreisteilungstheorie auf die Verteilung der e-ten Potenzreste. Königsberg 1922.

sich auf die Verteilung der höheren Potenzreste beziehen. Daraus läßt sich nicht nur das Hurwitzsche Resultat ableiten, sondern dahin vervollständigen, daß die Einschränkung, l solle eine ungerade Primzahl sein, aufgehoben wird. Auch läßt sich für die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (1) ein expliziter Ausdruck gewinnen, während sich bei Hurwitz nur Rekursionsformeln finden.

Wegen der schweren Zugänglichkeit meiner Dissertation — diese ist nicht im Druck erschienen — werde ich zunächst einige der dort entwickelten Formeln und Sätze, mit vollständigen Beweisen versehen, mitteilen, um dann in § 4 die Verallgemeinerung des Hurwitzschen Satzes abzuleiten.

Um nun unsere Darstellung nicht zu oft unterbrechen zu müssen, geben wir im folgenden eine kurze Zusammenstellung aller von uns gebrauchten Formeln und Lehrsätze der Kreisteilungstheorie. Wegen ihres Beweises verweisen wir auf das Buch von P. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung (Leipzig 1872).

Es sei r eine primitive p-te Einheitswurzel, also eine komplexe Wurzel der Gleichung

$$x^p = 1, \tag{2}$$

ω bezeichne eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^{p-1} = 1. \tag{3}$$

Dann sind bekanntlich die Lagrangeschen Resolventen

$$(\omega^\lambda, r) = r + \omega^\lambda r^g + \omega^{2\lambda} r^{g^2} + \ldots + \omega^{(p-2)\lambda} r^{g^{p-2}} \tag{4}$$

für die Auflösung der Gleichung (2) von großer Bedeutung. g bedeutet in diesem Ausdruck eine primitive Wurzel (mod p) und λ eine ganze rationale Zahl. In der Kreisteilungstheorie wird gezeigt, daß der Ausdruck

$$\psi(h, k, \omega) = \frac{(\omega^h, r)(\omega^k, r)}{(\omega^{h+k}, r)}$$

für zwei ganze Zahlen h und k, deren Summe nicht durch $p-1$ teilbar ist, eine aus der Wurzel ω gebildete ganze komplexe Zahl ist, und zwar ist

$$\psi(h, k, \omega) = \sum_{\mu=1}^{p-2} \omega^{h \operatorname{ind} \mu - (h+k) \operatorname{ind} (\mu+1)}. \tag{5}$$

Aus der Symmetrie des $\psi(h, k, \omega)$ darstellenden Quotienten in bezug auf h und k folgt, daß in der Summe auf der rechten Seite (5) h und k vertauscht werden kann, so daß auch

$$\psi(h, k, \omega) = \sum_{\mu=1}^{p-2} \omega^{k \operatorname{ind} \mu - (h+k) \operatorname{ind} (\mu+1)} \tag{5a}$$

ist. Es seien nun $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{l-1}$ die l Gaußschen f-gliedrigen Perioden

$$(6)\qquad \begin{cases} \eta = r + r^{g^l} + r^{g^{2l}} + \ldots + r^{g^{(f-1)l}} \\ \eta_1 = r^g + r^{g^{l+1}} + r^{g^{2l+1}} + \ldots + r^{g^{(f-1)l+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{l-1} = r^{g^{l-1}} + r^{g^{2l-1}} + r^{g^{3l-1}} + \ldots + r^{g^{p-2}}, \end{cases}$$

wobei l irgendein Teiler von $p-1$ und

$$(7)\qquad p - 1 = l \cdot f$$

ist. Versteht man in (4) unter λ ein Vielfaches von f, setzt also $\lambda = f \cdot s$ und beachtet, daß

$$\omega^f = \alpha$$

eine primitive Wurzel der Gleichung

$$x^l = 1$$

ist, so geht (4) über in

$$(\omega^{fs}, r) = \eta + \alpha^s \eta_1 + \alpha^{2s} \eta_2 + \ldots + \alpha^{(l-1)s} \eta_{l-1} = (\alpha^s, \eta).$$

Aus (5) und (5a) erhält man dann für $h = fs$ und $k = ft$

$$(8)\qquad \frac{(\alpha^s, \eta)(\alpha^t, \eta)}{(\alpha^{s+t}, \eta)} = \sum_{\mu=1}^{p-2} \alpha^{s \operatorname{ind} \mu - (s+t) \operatorname{ind} (\mu+1)} = \sum_{\mu=1}^{p-2} \alpha^{t \operatorname{ind} \mu - (s+t) \operatorname{ind} (\mu+1)},$$

eine Formel, die nur gilt, wenn $s + t \not\equiv 0 \pmod{l}$ ist. Ist $t = -s$, so tritt an ihre Stelle die andere

$$(9)\qquad (\alpha^s, \eta)(\alpha^{-s}, \eta) = (-1)^{sf} p,$$

wobei s nicht durch l teilbar sein darf. Wenn s durch l teilbar ist, so gilt die Formel

$$(10)\qquad (\alpha^s, \eta) = (1, \eta) = -1.$$

Setzt man in (8) $s = \lambda$, $t = 1$, so erhält man

$$\frac{(\alpha^\lambda, \eta)(\alpha, \eta)}{(\alpha^{\lambda+1}, \eta)} = \sum_{\mu=1}^{p-2} \alpha^{\lambda \operatorname{ind} \mu - (\lambda+1) \operatorname{ind} (\mu+1)}$$

$$(11)\qquad = \sum_{\mu=1}^{p-2} \alpha^{\operatorname{ind} \mu - (\lambda+1) \operatorname{ind} (\mu+1)} = \psi_\lambda(\alpha) \qquad (1 \leqq \lambda \leqq l-2).$$

Ferner ist noch die folgende Beziehung

$$(12)\qquad \psi_\lambda(\alpha)\, \psi_\lambda(\alpha^{-1}) = p$$

zu beachten.

§ 1.

Problemstellung und Ansatz.

Eine Zahl D eines reduzierten Restsystems

$$1, 2, 3, \ldots, p-1 \tag{1}$$

in bezug auf den Primzahlmodus p heißt ein l-ter Potenzrest (mod p), wobei l ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit als Divisor von

$$p-1 = lf \tag{2}$$

angesehen werden kann, wenn die Kongruenz

$$x^l \equiv D \pmod{p} \tag{3}$$

Lösungen besitzt. D ist l-ter Potenzrest oder nicht, je nachdem D der Bedingung

$$D^{\frac{p-1}{l}} \equiv D^f \equiv 1 \pmod{p} \tag{4}$$

genügt oder nicht. Es gibt $\frac{p-1}{l} = f$ verschiedene l-te Potenzreste.

Wir ordnen nun jeder Zahl n des Restsystems (1) eine gewisse Zahl zu, die wir symbolisch mit

$$\left\{\frac{n}{p}\right\}$$

bezeichnen und die durch die folgenden Festsetzungen wohl definiert ist:

1. Für ein Produkt zweier Zahlen n und n' von (1) soll sein

$$\left\{\frac{nn'}{p}\right\} = \left\{\frac{n}{p}\right\}\left\{\frac{n'}{p}\right\}.$$

2. Wenn $n \equiv 0 \pmod{p}$, soll $\left\{\frac{n}{p}\right\} = 0$ sein.

3. Für $n \equiv n' \pmod{p}$, soll $\left\{\frac{n}{p}\right\} = \left\{\frac{n'}{p}\right\}$ sein.

4. Einer primitiven Wurzel g soll eine primitive l-te Einheitswurzel α so zugeordnet sein, daß

$$\left\{\frac{g}{p}\right\} = \alpha. \tag{5}$$

Da nun die Zahlen (1) den Potenzen $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ in einer gewissen Reihenfolge (mod p) kongruent sind, so sind nach Wahl von α den obigen Festsetzungen zufolge die Symbole $\left\{\frac{1}{p}\right\}, \left\{\frac{2}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{p-1}{p}\right\}$ eindeutig bestimmt. Aus

$$\alpha^l = 1$$

folgt, daß es unter den Potenzen $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1}$ nur l verschiedene, nämlich $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{l-1}, 1$, gibt, und jeder dieser l Potenzen entsprechen

$\frac{p-1}{l} = f$ verschiedene Zahlen von (1). Wenn für eine Zahl n das Symbol $\left\{\frac{n}{p}\right\} = \alpha^k$ ist, wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, l-1$ sein kann, so wollen wir sagen, n ist vom Restcharakter α^k. Ferner fassen wir alle f Zahlen vom gleichen Restcharakter α^k zu einer Restklasse A_k zusammen. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Einteilung der Zahlen (1) in l Klassen

$$A_0, A_1, \ldots, A_{l-1}$$

von je f Zahlen. A_0 umfaßt alle Zahlen vom Restcharakter $\alpha^0 = 1$, d. h. alle l-ten Potenzreste. Denn die einzigen Zahlen vom Charakter $\alpha^0 = \alpha^l = \alpha^{2l} = \ldots = \alpha^{fl} = 1$ sind ja die Zahlen $g^l, g^{2l}, \ldots, g^{fl}$, d. h. die f verschiedenen l-ten Potenzreste.

Wir fragen uns nun, wie oft es vorkommen kann, daß von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen die erste den Restcharakter α_1 und die zweite den Restcharakter α_2 besitzt. α_1 und α_2 sind irgend zwei der Potenzen $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{l-1}$. Die Anzahl solcher Zahlenpaare bezeichnen wir mit $N(\alpha_1, \alpha_2)$. Es gibt, da α_1 und α_2 je l verschiedene Werte annehmen können, im ganzen l^2 Anzahlfunktionen. $N(1, 1)$ ist die Anzahl der Sequenzen zweier l-ter Potenzreste. Zur Bestimmung von $N(\alpha_1, \alpha_2)$ benutzen wir einen Ansatz, den E. Jacobsthal[3]) zuerst bei der Bestimmung der Anzahl der Sequenzen quadratischer Reste eingeführt hat, und führen die Funktion

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = \varkappa \frac{\varkappa^l - \lambda^l}{\varkappa - \lambda}$$

ein, wo $\varkappa$ und λ zwei l-te Einheitswurzeln sind, so daß man auch schreiben kann

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = 1 + \varkappa^{l-1}\lambda + \varkappa^{l-2}\lambda^2 + \ldots + \varkappa^2\lambda^{l-2} + \varkappa\lambda^{l-1}.$$

Dann ist

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = 0, \text{ wenn } \varkappa \neq \lambda,$$

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = l, \text{ wenn } \varkappa = \lambda$$

ist. Nun beachten wir den Ausdruck

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi\left(\alpha_1, \left\{\frac{n}{p}\right\}\right) \cdot \varphi\left(\alpha_2, \left\{\frac{n+1}{p}\right\}\right),$$

wo α_1 und α_2 wieder l-te Einheitswurzeln sind. Dann ist

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \text{ wenn } \alpha_1 \neq \left\{\frac{n}{p}\right\} \text{ oder } \alpha_2 \neq \left\{\frac{n+1}{p}\right\},$$

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = l^2, \text{ wenn } \alpha_1 = \left\{\frac{n}{p}\right\} \text{ und } \alpha_2 = \left\{\frac{n+1}{p}\right\}$$

[3]) E. Jacobsthal: Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Berlin 1906. S. 27.

ist. Bilden wir jetzt den Summenausdruck

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^{p-2} \varphi\left(\alpha_1, \left\{\frac{n}{p}\right\}\right) \cdot \varphi\left(\alpha_2, \left\{\frac{n+1}{p}\right\}\right),$$

so erkennt man leicht, daß

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = l^2 N(\alpha_1, \alpha_2)$$

ist; denn in der $(p-2)$-gliedrigen Summe sind nur diejenigen Glieder von Null verschieden, nämlich gleich l^2 in denen $\left\{\frac{n}{p}\right\} = \alpha_1$ und $\left\{\frac{n+1}{p}\right\} = \alpha_2$ ist. Es handelt sich also zur Lösung unseres Problems um die Ausführung der Summation

$$l^2 N(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^{p-2} \left(1 + \alpha_1^{l-1}\left\{\frac{n}{p}\right\} + \alpha_1^{l-2}\left\{\frac{n}{p}\right\}^2 + \ldots + \alpha_1\left\{\frac{n}{p}\right\}^{l-1}\right)$$
$$\left(1 + \alpha_2^{l-1}\left\{\frac{n+1}{p}\right\} + \alpha_2^{l-2}\left\{\frac{n+1}{p}\right\}^2 + \ldots + \alpha_2\left\{\frac{n+1}{p}\right\}^{l-1}\right).$$

Bei der Ausführung der Summation treten Summenausdrücke der Form

$$\sum_{n=1}^{p-2} \left\{\frac{n}{p}\right\}^s \left\{\frac{n+1}{p}\right\}^t$$

auf, um deren Bestimmung es sich zunächst handelt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\sum_{n=1}^{p-2} \left\{\frac{n}{p}\right\}^s \left\{\frac{n+1}{p}\right\}^t = S_{s,t},$$

wobei $0 \leqq s \leqq l-1$ und $0 \leqq t \leqq l-1$ ist.

§ 2.

Zurückführung der Größen $S_{s,t}$ auf die Ausdrücke $\psi_\lambda(\alpha)$.

$S_{s,t}$ läßt sich nun leicht durch einen anderen Ausdruck ersetzen. Da nämlich

$$n \equiv g^{\operatorname{ind} n} \pmod{p}$$

ist, so folgt

$$\left\{\frac{n}{p}\right\} = \left\{\frac{g^{\operatorname{ind} n}}{p}\right\} = \left\{\frac{g}{p}\right\}^{\operatorname{ind} n},$$

und da $\left\{\frac{g}{p}\right\} = \alpha$ ist,

$$\left\{\frac{n}{p}\right\} = \alpha^{\operatorname{ind} n}. \tag{1}$$

Wenn man bedenkt, daß α als l-te Einheitswurzel auch gleich ω^f gesetzt

werden kann, wo ω eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel ist, so kann man auch schreiben

$$\left\{\frac{n}{p}\right\} = \omega^{f \operatorname{ind} n}.$$

Also ist

$$(2) \qquad S_{s,t} = \sum_{n=1}^{p-2} \omega^{fs \operatorname{ind} n + ft \operatorname{ind}(n+1)} = \sum_{n=1}^{p-2} \alpha^{s \operatorname{ind} n + t \operatorname{ind}(n+1)}.$$

Die erste auf der rechten Seite von $S_{s,t}$ stehende Summe ist analog den Ausdrücken $\psi(h, k, \omega)$ der Einleitung gebildet. Wollen wir Übereinstimmung erzielen, so haben wir zu setzen

$$h = fs, \quad h + k = -ft, \quad \text{also} \quad k = -f(s+t).$$

Demnach ist

$$S_{s,t} = \frac{(\omega^{fs}, r)\,(\omega^{-f(s+t)}, r)}{(\omega^{-ft}, r)} = \frac{(\alpha^{s}, \eta)\,(\alpha^{-(s+t)}, \eta)}{(\alpha^{-t}, \eta)}.$$

Diese Formel gilt, wenn

$$h + k = -ft \not\equiv 0 \pmod{p-1},$$

also

$$t \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Wenden wir auf den letzten Ausdruck für $S_{s,t}$ die Formel (9) der Einleitung an, so folgt, wenn wir noch die dort angegebene Bedingung beachten,

$$(3) \quad S_{s,t} = (-1)^{sf} \frac{(\alpha^{s}, \eta)\,(\alpha^{t}, \eta)}{(\alpha^{s+t}, \eta)}, \quad \text{wenn} \quad s \not\equiv 0,\ t \not\equiv 0,\ s + t \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Aus dieser Beziehung folgt ohne weiteres die andere, die unter denselben Einschränkungen gilt,

$$(4) \qquad (-1)^{sf} S_{s,t} = (-1)^{tf} S_{t,s}.$$

Ist dagegen $s + t \equiv 0 \pmod{l}$, so ist

$$(3a) \quad S_{s,t} = \frac{(\alpha^{s}, \eta)\,(1, \eta)}{(\alpha^{s}, \eta)} = (1, \eta) = r + r^{g} + \ldots + r^{g^{p-2}}$$
$$= r + r^{2} + \ldots + r^{p-1} = -1, \quad s + t \equiv 0 \pmod{l},$$

und Formel (4) hat also auch Gültigkeit, wenn $s + t \equiv 0 \pmod{l}$.

Um nun $S_{s,t}$ auf die Größen $\psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), \ldots, \psi_{l-2}(\alpha)$ zurückzuführen, unterscheiden wir die beiden Fälle $s + t \leqq l$ und $s + t \geqq l + 1$.

1. *Fall*: $s + t \leqq l$. Wir bilden mit Hilfe von Formel (10) Einl. den Quotienten

$$\frac{\psi_\lambda(\alpha)}{\psi_{\mu-1}(\alpha)} = \frac{(\alpha^{\lambda}, \eta)\,(\alpha^{\mu}, \eta)}{(\alpha^{\lambda+1}, \eta)\,(\alpha^{\mu-1}, \eta)} = \frac{\dfrac{(\alpha^{\lambda}, \eta)\,(\alpha^{\mu}, \alpha)}{(\alpha^{\lambda+\mu}, \eta)}}{\dfrac{(\alpha^{\lambda+1}, \eta)\,(\alpha^{\mu-1}, \eta)}{(\alpha^{\lambda+\mu}, \eta)}} = \frac{(-1)^{\lambda f} S_{\lambda,\mu}}{(-1)^{(\lambda+1)f} S_{\lambda+1,\mu-1}}.$$

Daher ist

$$S_{\lambda,\mu} = (-1)^f \frac{\psi_\lambda(\alpha)}{\psi_{\mu-1}(\alpha)} S_{\lambda+1,\mu-1}.$$

Setzt man nun der Reihe nach $\mu = 2, 3, \ldots, \mu$, so erhalten wir

$$S_{\lambda,2} = (-1)^f S_{\lambda+1,1} \frac{\psi_\lambda(\alpha)}{\psi_1(\alpha)},$$

$$S_{\lambda-1,3} = (-1)^f S_{\lambda,2} \frac{\psi_{\lambda-1}(\alpha)}{\psi_2(\alpha)},$$

$$S_{\lambda-2,4} = (-1)^f S_{\lambda-1,3} \frac{\psi_{\lambda-2}(\alpha)}{\psi_3(\alpha)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{\lambda-\mu+2,\mu} = (-1)^f S_{\lambda-\mu+1,\mu-1} \frac{\psi_{\lambda-\mu+2}(\alpha)}{\psi_{\mu-1}(\alpha)}.$$

Durch Multiplikation dieser $(\mu-1)$ Gleichungen erhalten wir, wenn wi die gleichen $S_{s,t}$ auf beiden Seiten fortheben,

$$S_{\lambda-\mu+2,\mu} = (-1)^{f(\mu-1)} \frac{\psi_\lambda(\alpha)\psi_{\lambda-1}(\alpha)\cdots\psi_{\lambda-\mu+2}(\alpha)}{\psi_1(\alpha)\ \psi_2(\alpha)\ \cdots\ \psi_{\mu-1}(\alpha)} S_{\lambda+1,1}.$$

Setzen wir nun $\lambda-\mu+2=s$ und $\mu=t$, also $\lambda=s+t-2$, so folg

$$S_{s,t} = (-1)^{f(t-1)} \frac{\psi_{s+t-2}(\alpha)\,\psi_{s+t-3}(\alpha)\cdots\psi_s(\alpha)}{\psi_1(\alpha)\ \cdot\ \psi_2(\alpha)\ \cdots\ \psi_{t-1}(\alpha)} S_{s+t-1,1}.$$

Da die Indizes von $\psi_\lambda(\alpha)$ der Beschränkung $1 \leqq \lambda \leqq l-2$ unterworfe sind, so gilt diese Formel für $S_{s,t}$ nur so lange

$$t-1 \geqq 1, \quad s+t-2 \leqq l-2,$$

also

$$s+t \leqq l, \quad s \leqq l-2, \quad t \geqq 2.$$

Die Indizes der Größen ψ in der Formel für $S_{s,t}$ sind die im Zähler und Nenner der Entwicklung des Binomialausdruckes $\binom{s+t-2}{t-1}$ auftretender Faktoren, da ja

$$\binom{s+t-2}{t-1} = \frac{(s+t-2)\,(s+t-3)\cdots\ s}{1\ \cdot\ 2\ \cdots(t-1)}.$$

Wir wollen also zur Abkürzung den symbolischen Ausdruck $\left[\frac{\psi_m(\alpha)}{\psi_n(\alpha)}\right]$ ein führen und darunter verstehen

$$(5) \qquad \left[\frac{\psi_m(\alpha)}{\psi_n(\alpha)}\right] = \frac{\psi_m(\alpha)\psi_{m-1}(\alpha)\cdots\psi_{m-n+1}(\alpha)}{\psi_1(\alpha)\cdot\ \psi_2(\alpha)\ \cdots\ \psi_n(\alpha)}.$$

Dann können wir unsere Formel für $S_{s,t}$ auch folgendermaßen schreiben

$$(6) \quad S_{s,t} = (-1)^{f(t-1)} \left[\frac{\psi_{s+t-2}(\alpha)}{\psi_{t-1}(\alpha)}\right] S_{s+t-1,1} \qquad (s+t \leqq l,\ t \geqq 2,\ s \leqq l-2).$$

Durch diese Formel sind die Summen $S_{s,t}$ auf Ausdrücke der Form $S_{\lambda,1}$ zurückgeführt. Diese Größen lassen sich aber leicht berechnen. Es ist nämlich nach (3)

$$(7)\quad S_{\lambda,1} = (-1)^{\lambda f} \frac{(\alpha^{\lambda}, \eta)\,(\alpha, \eta)}{(\alpha^{\lambda+1}, \eta)} = (-1)^{\lambda f} \psi_{\lambda}(\alpha) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l-2).$$

Es bleiben nun zur vollständigen Erledigung des ersten Falles noch die beiden Größen $S_{0,1}$ und $S_{l-1,1}$. Es ist aber

$$(8)\quad S_{0,1} = \sum_{n=1}^{p-2} \left\{\frac{n+1}{p}\right\} = -1.$$

Ferner ist

$$S_{l-1,1} = \sum_{n=1}^{p-2} \omega^{f(l-1)\operatorname{ind} n + f \operatorname{ind}(n+1)}.$$

Setzt man nun, um auch hier die Formel (5) der Einl. anwenden zu können,

$$h = f(l-1), \qquad h + k = -f, \qquad k = -fl,$$

so ergibt sich

$$(9)\quad S_{l-1,1} = \frac{(\omega^{f(l-1)}, r)\,(\omega^{-fl}, r)}{(\omega^{-f}, r)} = (\omega^{-fl}, r) = (1, r) = -1.$$

2. *Fall*: $s + t \geqq l + 1$. Wir setzen

$$l - s = s', \qquad l - t = t'.$$

Dann ist

$$l - s' + l - t' \geqq l + 1,$$
$$-s' - t' \geqq -l + 1,$$
$$s' + t' \leqq l - 1.$$

Also ist Formel (6) auf $S_{s',t'}$ anwendbar, vorausgesetzt, daß $s' \leqq l-2$, also

$$s \geqq 2,$$

und $t' \geqq 2$, also

$$t \leqq t - 2.$$

Dann ist

$$S_{s',t'} = (-1)^{f(t'-1)} \begin{bmatrix} \psi_{s'+t'-2}(\alpha) \\ \psi_{t'-1}(\alpha) \end{bmatrix} S_{s'+t'-1,1}.$$

Nun gehen wir auf beiden Seiten dieser Formel zu den konjugiert komplexen Werten über. Dann haben wir α durch α^{-1} zu ersetzen, und, da $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ und $\left\{\frac{n+1}{p}\right\}$ in $\left\{\frac{n}{p}\right\}^{l-1}$ und $\left\{\frac{n+1}{p}\right\}^{l-1}$ übergehen, so geht $S_{s',t'}$ über in $S_{l-s',l-t'} = S_{s,t}$ und $S_{s'+t'-1,1}$ in $S_{s+t+1-l,l-1}$. Also erhalten wir

$$(10)\quad S_{s,t} = (-1)^{f(l-t-1)} \begin{bmatrix} \psi_{2l-s-t-2}(\alpha^{-1}) \\ \psi_{l-t-1}(\alpha^{-1}) \end{bmatrix} S_{s+t+1-l,\,l-1},$$
$$s + t \geqq l + 1, \qquad s \geqq 2, \qquad t \leqq l - 2.$$

Durch diese Formel sind für den zweiten Fall die Größen $S_{s,t}$ auf di Summen $S_{\lambda,l-1}$ zurückgeführt, die sich nun leicht als konjugiert komplex Werte der Größen $S_{\lambda,1}$ ergeben. So folgt, wenn wir auf beiden Seite von (7) die konjugiert komplexen Werte nehmen,

$$S_{l-\lambda,l-1} = (-1)^{\lambda f} \psi_\lambda(\alpha^{-1}),$$

oder, wenn man $l-\lambda$ durch λ ersetzt,

$$S_{\lambda,l-1} = (-1)^{(l-\lambda)f} \psi_{l-\lambda}(\alpha^{-1}) \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, l-1) \tag{11}$$

und endlich, da $S_{l-1,1} = -1$ ist, auch

$$S_{1,l-1} = -1. \tag{12}$$

Endlich schreiben wir noch die Formeln für die Summen $S_{s,t}$ auf, be denen s oder t oder beide Indizes gleich 0 sind. So ist

$$S_{0,0} = p-2. \tag{13}$$

Ferner

$$\begin{aligned} S_{0,\mu} &= \sum_{n=1}^{p-2} \left\{\frac{n+1}{p}\right\} = \sum_{n=1}^{p-2} \alpha^{\mu \operatorname{ind}(n+1)} = \sum_{n=1}^{p-1} \alpha^{\mu \operatorname{ind} n} - 1 \\ &= f(\alpha^\mu + \alpha^{2\mu} + \ldots + \alpha^{l\mu}) - 1 \\ &= f\frac{\alpha^\mu(\alpha^{l\mu}-1)}{\alpha^\mu - 1} - 1, \end{aligned}$$

also

$$S_{0,\mu} = -1, \quad \text{wenn} \quad \mu \not\equiv 0 \pmod{l}. \tag{14}$$

Endlich ist

$$S_{\mu,0} = -\left\{\frac{-1}{p}\right\}^\mu \quad \text{wenn} \quad \mu \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Nun ist

$$\left\{\frac{-1}{p}\right\} = \left\{\frac{g}{p}\right\}^{\frac{p-1}{2}} = \alpha^{\frac{p-1}{2}} = \alpha^{\frac{lf}{2}},$$

ist also f gerade, so ist

$$\left\{\frac{-1}{p}\right\} = \alpha^{l\cdot\frac{f}{2}} = 1 = (-1)^f,$$

ist dagegen f ungerade, so ist l gerade, also

$$\left\{\frac{-1}{p}\right\} = \alpha^{\frac{l}{2}\cdot f} = (-1)^f,$$

allgemein ist mithin

$$\left\{\frac{-1}{p}\right\} = (-1)^f$$

und

$$S_{\mu,0} = -(-1)^{\mu f}, \quad \text{wenn} \quad \mu \not\equiv 0 \pmod{l}. \tag{15}$$

§ 3.

Der allgemeine Ausdruck für $N(\alpha_1, \alpha_2)$.

Es war

$$l^2 N(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^{p-2} \left(1 + \alpha_1^{l-1}\left\{\frac{n}{p}\right\} + \ldots + \alpha_1\left\{\frac{n}{p}\right\}^{l-1}\right) \left(1 + \alpha_2^{l-1}\left\{\frac{n+1}{p}\right\} + \ldots + \alpha_2\left\{\frac{n+1}{p}\right\}^{l-1}\right).$$

Nun multiplizieren wir der Reihe nach die Glieder der ersten Klammer mit den Gliedern der zweiten Klammer und wenden dann die passenden Formeln des vorigen Paragraphen an. Wir schreiben den so entstehenden Ausdruck möglichst ausführlich hin, um das allgemeine Bildungsgesetz deutlicher erkennen zu können.

$$\begin{aligned}
&l^2 N(\alpha_1, \alpha_2) \\
&= p - 2 + \alpha_1^{l-1}(-(-1)^f) + \alpha_1^{l-2}(-(-1)^{2f}) + \ldots + \alpha_1(-(-1)^{(l-1)f}) \\
&+ \alpha_2^{l-1}[-1 + \alpha_1^{l-1}(-1)^f \psi_1(\alpha) + \alpha_1^{l-2}(-1)^{2f}\psi_2(\alpha) + \ldots \\
&\qquad + \alpha_1^2(-1)^{(l-2)f}\psi_{l-2}(\alpha) + \alpha_1] \\
&+ \alpha_2^{l-2}\Big[-1 + \alpha_1^{l-1}(-1)^f \left[\begin{matrix}\psi_1(\alpha)\\ \psi_1(\alpha)\end{matrix}\right] S_{2,1} + \alpha_1^{l-2}(-1)^f \left[\begin{matrix}\psi_2(\alpha)\\ \psi_1(\alpha)\end{matrix}\right] S_{3,1} + \ldots \\
&\qquad + \alpha_1^2(-1)^f \left[\begin{matrix}\psi_{l-2}(\alpha)\\ \psi_1(\alpha)\end{matrix}\right] S_{l-1,1} + \alpha_1(-1)^{(l-3)f}\left[\begin{matrix}\psi_{l-3}(\alpha^{-1})\\ \psi_{l-3}(\alpha^{-1})\end{matrix}\right] S_{2,l-1}\Big] \\
&+ \alpha_2^{l-3}\Big[-1 + \alpha_1^{l-1}(-1)^{2f}\left[\begin{matrix}\psi_2(\alpha)\\ \psi_2(\alpha)\end{matrix}\right] S_{3,1} + \alpha_1^{l-2}(-1)^{2f}\left[\begin{matrix}\psi_3(\alpha)\\ \psi_2(\alpha)\end{matrix}\right] S_{4,1} + \ldots \\
&\qquad + \alpha_1^3(-1)^{2f}\left[\begin{matrix}\psi_{l-2}(\alpha)\\ \psi_2(\alpha)\end{matrix}\right] S_{l-1,1} + \alpha_1^2(-1)^{(l-4)f}\left[\begin{matrix}\psi_{l-3}(\alpha^{-1})\\ \psi_{l-4}(\alpha^{-1})\end{matrix}\right] S_{2,l-1} \\
&\qquad + \alpha_1(-1)^{(l-4)f}\left[\begin{matrix}\psi_{l-4}(\alpha^{-1})\\ \psi_{l-4}(\alpha^{-1})\end{matrix}\right] S_{3,l-1}\Big] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\

Zu α_2^{l-t} gehört in der entsprechenden eckigen Klammer ein Glied der Form

$$\alpha_1^t (-1)^{(t-1)f} \begin{bmatrix} \psi_{l-2}(\alpha) \\ \psi_{t-1}(\alpha) \end{bmatrix} S_{l-1,1}.$$

Nun ist nach § 2, (3a) $S_{l-t,t} = -1$, ferner nach § 2, (6)

$$S_{l-t,t} = (-1)^{f(t-1)} \begin{bmatrix} \psi_{l-2}(\alpha) \\ \psi_{t-1}(\alpha) \end{bmatrix} S_{l-1,1},$$

also

$$(-1)^{(t-1)f} \begin{bmatrix} \psi_{l-2}(\alpha) \\ \psi_{t-1}(\alpha) \end{bmatrix} S_{l-1,1} = -1.$$

Folglich hat α_2^{l-t} den Faktor

$$-\alpha_1^t.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung die auf der rechten Seite von $l^2 N(\alpha_1, \alpha_2)$ vorkommenden Ausdrücke

(1) $$p - 2 - \alpha_1^{l-1}(-1)^f - \alpha_1^{l-2}(-1)^{2f} - \ldots - \alpha_1 (-1)^{(l-1)f} = A,$$

(2) $$-\alpha_2^{l-1} - \alpha_2^{l-2} - \ldots - \alpha_2^2 - \alpha_2 = B,$$

(3) $$-\alpha_1 \alpha_2^{l-1} - \alpha_1^2 \alpha_2^{l-2} - \ldots - \alpha_1^{l-2}\alpha_2^2 - \alpha_1^{l-1}\alpha_2 = C,$$

(4) $$\alpha_2^{l-1}[\alpha_1^{l-1}(-1)^f \psi_1(\alpha) + \alpha_1^{l-2}(-1)^{2f}\psi_2(\alpha) + \ldots + \alpha_1^2(-1)^{(l-2)f}\psi_{l-2}(\alpha)] = D$$

(5) $$\alpha_2[\alpha_1(-1)^f \psi_1(\alpha^{-1}) + \alpha_1^2(-1)^{2f}\psi_2(\alpha^{-1}) + \ldots + \alpha_1^{l-2}(-1)^{(l-2)f}\psi_{l-2}(\alpha^{-1})] =$$

Man findet für A, B und C folgende Ausdrücke

$A = p - 2 - \frac{\alpha_1^l(-1)^f - \alpha_1}{\alpha_1 - (-1)}$, also, wenn f gerade und $\alpha_1 \neq 1$: $A = p - 1$

„ „ „ „ „ $\alpha_1 = 1$: $A = p - 1$

„ „ f ungerade „ $\alpha_1 \neq -1$: $A = p - 1$

„ „ „ „ „ $\alpha_1 = -1$: $A = p - 1$

$B = \frac{\alpha_2^l - \alpha_2}{1 - \alpha_2}$, „ „ $\alpha_2 \neq 1$: $B = 1$

„ „ $\alpha_2 = 1$: $B = -l + 1$

$C = \frac{\alpha_1 \alpha_2^l - \alpha_1^l \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, „ „ $\alpha_1 \neq \alpha_2$: $C = 1$

$\alpha_1 = \alpha_2$: $C = -l + 1$

$A + B + C$ ist also eine ganze rationale Zahl

(6) $$A + B + C = p + 1 - \eta l.$$

η hat den Wert 0, 1, 2 oder 3, und zwar ist

$$\begin{cases} f \text{ gerade;} & \eta = -3, \text{ wenn } \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1 \\ & \eta = 0, \quad \text{„} \quad \alpha_1 \neq 1,\ \alpha_2 \neq 1,\ \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ & \eta = 1, \text{ in allen anderen Fällen} \\ f \text{ ungerade;} & \eta = 2, \text{ wenn } \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 \neq \pm 1 \text{ oder } \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1 \\ & \eta = 1, \quad \text{„} \quad \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 \neq \pm 1 \text{ oder } \alpha_1 \neq \pm 1,\ \alpha_2 \neq \pm 1,\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ & \eta = 0, \quad \text{„} \quad \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 \neq 1 \text{ oder } \alpha_1 \neq \pm 1,\ \alpha_2 \neq \pm 1,\ \alpha_1 \neq \alpha_2. \end{cases}$$

In C und D sind die übereinanderstehenden Glieder konjugiert komplex. Auch von den übrigbleibenden Gliedern der rechten Seite von $l^2 N(\alpha_1, \alpha_2)$ sind immer zwei konjugiert komplex. Es findet sich nämlich für $s + t > l$ der Ausdruck

$$\alpha_2^{l-s}\alpha_1^{s-t}(-1)^{(s-1)f}\begin{bmatrix}\psi_{s+t-2}(\alpha)\\ \psi_{s-1}(\alpha)\end{bmatrix} S_{s+t-1,1} = \alpha_2^{l-s}\alpha_1^{l-t}(-1)^{tf}\begin{bmatrix}\psi_{s+t-2}(\alpha)\\ \psi_{s-1}(\alpha)\end{bmatrix}\psi_{s+t-1}(\alpha)$$

und ferner der Ausdruck

$$\alpha_2^{s}\alpha_1^{t}(-1)^{(s-1)f}\begin{bmatrix}\psi_{s+t-2}(\alpha^{-1})\\ \psi_{s-1}(\alpha^{-1})\end{bmatrix} S_{l-s-t+1,l-1} = \alpha_2^{s}\alpha_1^{t}(-1)^{tf}\begin{bmatrix}\psi_{s+t-2}(\alpha^{-1})\\ \psi_{s-1}(\alpha^{-1})\end{bmatrix}\psi_{s+t-1}(\alpha^{-1}),$$

wo jetzt $(l-s)+(l-t) < l$ ist. Diese beiden Ausdrücke sind aber konjugiert komplex.

Ersetzt man nach § 2, (7) und (11) die Größen $S_{\lambda,1}$ und $S_{\lambda,l-1}$ durch die $\psi_\lambda(\alpha)$, so findet man endlich nach einigen einfachen Umformungen

$$(7) \qquad l^2 N(\alpha_1, \alpha_2) = p + 1 - \eta l + D + E + \sum_{t=2}^{l-2} \alpha_2^{l-t} F_t(\alpha_1),$$

wobei

$$(8) \quad F_t(\alpha_1) = \sum_{\lambda=1}^{t-1} \alpha_1^{\lambda}(-1)^{\lambda f}\begin{bmatrix}\psi_{l-t-2+\lambda}(\alpha^{-1})\\ \psi_{l-t-1}(\alpha^{-1})\end{bmatrix}\psi_{l-t-1+\lambda}(\alpha^{-1}) + \sum_{\lambda=t+1}^{l-1} \alpha_1^{\lambda}(-1)^{\lambda f}\begin{bmatrix}\psi_{l+t-2-\lambda}(\alpha)\\ \psi_{t-1}(\alpha)\end{bmatrix}\psi_{l+t-1-\lambda}(\alpha).$$

§ 4.

Diskussion der Formel und Beziehung zum Hurwitzschen Satz.

Wir leiten für $l^2 N(\alpha_1, \alpha_2)$ eine untere und obere Grenze ab. Zunächst folgt aus Einleitung (12), da $\psi_\lambda(\alpha)$ und $\psi_\lambda(\alpha^{-1})$ konjugiert komplex sind,

$$|\psi_\lambda(\alpha)| = \sqrt{p},$$

daher ist

$$\left|\begin{bmatrix}\psi_m(\alpha)\\ \psi_n(\alpha)\end{bmatrix}\right| = 1.$$

Dann ergibt sich

$$|D| < \sqrt{p}(l-2),$$

$$|E| < \sqrt{p}(l-2),$$

$$|F_t(\alpha_1)| < \sqrt{p}(t-1+l-t-1) = \sqrt{p}(l-2),$$

$$\left|\sum_{t=2}^{l-2} \alpha_2^{l-t} F_t(\alpha_1)\right| < \sqrt{p}(l-2)(l-3),$$

$$\left|D+E+\sum_{t=2}^{l-2} \alpha_2^{l-t} F_t(\alpha_1)\right| < \sqrt{p}(l-2)+\sqrt{p}(l-2)(l-3)$$

$$< \sqrt{p}(l-2)(l-1).$$

Daher ergibt sich folgender

Satz. *Die Anzahlfunktion* $N(\alpha_1, \alpha_2)$ *genügt folgender Ungleichheit*

$$(1)\quad p+1-\eta l-\sqrt{p}(l-2)(l-1) < l^2 N(\alpha_1, \alpha_2) < p+1-\eta l + \sqrt{p}(l-2)(l-1),$$

wo η *durch die Formeln* § 2 (6a) *gegeben ist.*

$N(\alpha_1, \alpha_2)$ ist sicher von Null verschieden, wenn

$$p+1-\eta l > \sqrt{p}(l-2)(l-1)$$

oder wenn

$$p^2+p[2-2\eta l-(l-2)^2(l-1)^2]+(\eta l-1)^2 > 0.$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn

$$p \geqq (l-2)^2(l-1)^2+2\eta l-2$$

oder

$$p > (l-2)^2(l-1)^2+2\eta l-3.$$

Nimmt man endlich für η den größten Wert 3, so ist sicher jedes $N(\alpha_1, \alpha_2)$ von Null verschieden, wenn

$$p > (l-2)^2(l-1)^2+6l-3,$$

$$(2)\quad p > l^4-6l^3+13l^2-6l+1.\ ^3)$$

Wenn also p eine gewisse von l abhängende Größe überschreitet, so enthält jede der l^2 Klassen Zahlen. Endlich folgt aus (1)

$$(3)\quad \lim_{p\to\infty} \frac{N(\alpha_1, \alpha_2)}{p} = \frac{1}{l^2},$$

---

[3]) Diese Schranke findet sich auch bei Dickson, allerdings nur für den Fall, daß l eine Primzahl ist.

d. h. mit wachsendem p wird die Verteilung der $p-2$ Zahlen des reduzierten Restsystems auf die l^2 Zahlklassen eine immer gleichmäßigere. Die Beziehung unserer Sätze zu den Hurwitzschen Ergebnissen läßt sich nun leicht herstellen.

Es sei x eine Zahl vom Restcharakter $\alpha_1 = \alpha^{r_1}$ und $x+1$ habe den Restcharakter $\alpha_2 = \alpha^{r_2}$. Dann kann man setzen

$$x \equiv g^{t_1 l + r_1} \pmod p,$$
$$x+1 \equiv g^{t_2 l + r_2} \pmod p.$$

Es muß also sein

$$g^{t_1 l + r_1} + 1 \equiv g^{t_2 l + r_2} \pmod p \quad \text{oder} \quad g^{t_1 l + r_1} + g^{t_2 l + r_2 + \frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Die Anzahl $N(\alpha_1, \alpha_2)$ ist also gleich der Anzahl der Lösungen t_1, t_2 dieser Kongruenz. Multipliziert man noch diese Kongruenz mit $g^{t_3 l + \gamma}$, wo t_3 gleich 1, 2, ... oder f sein kann, so entsprechen also jeder der $N(\alpha_1, \alpha_2)$ Lösungen f Lösungen t_1, t_2, t_3 der Kongruenz

$$g^{(t_1+t_3) l + r_1 + \gamma} + g^{(t_2+t_3) l + r_2 + \gamma + \frac{p-1}{2}} + g^{t_3 l + \gamma} \equiv 0 \pmod p.$$

Setzt man nun

$$t_1 + t_3 = \xi,$$
$$t_2 + t_3 = \eta,$$
$$t_3 = \zeta,$$
$$r_1 + \gamma = \alpha,$$
$$r_2 + \gamma + \frac{p-1}{2} = \beta,$$

so entsprechen jeder der $N(\alpha_1, \alpha_2)$ Lösungen f Lösungen ξ, η, ζ der Kongruenz

$$g^{\xi l + \alpha} + g^{\eta l + \beta} + g^{\zeta l + \gamma} \equiv 0 \pmod p. \tag{4}$$

Umgekehrt entspricht immer l von diesen Lösungen eins und nur eins der $N(\alpha_1, \alpha_2)$ Zahlenpaare. Die letzte Kongruenz hat also $f N(\alpha_1, \alpha_2)$ Lösungen. Also ist in Hurwitzscher Schreibweise

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = [\alpha, \beta, \gamma]. \tag{5}$$

Setzt man endlich

$$g^{\xi} = x, \quad g^{\eta} = y, \quad g^{\zeta} = z,$$
$$g^{\alpha} = a, \quad g^{\beta} = b, \quad g^{\gamma} = c,$$

so entsprechen den $N(\alpha_1, \alpha_2)$ Zahlenpaaren

$$\mathfrak{A} = l^3 f [\alpha, \beta, \gamma] \text{ [4]} = (p-1) l^2 N(\alpha_1, \alpha_2)$$

Lösungen der Kongruenz

$$a x^l + b y^l + c z^l \equiv 0 \pmod p.$$

---

[4]) Hurwitz, l. c. S. 277.

Damit sind die Hurwitzschen Sätze von neuem bewiesen. Sie gelten aber jetzt für jedes beliebige l. Denn wenn auch bisher l als irgend ein Teiler von $p-1$ vorausgesetzt war, so gilt der Satz, wie leicht zu zeigen, für jedes beliebige l. Sei nämlich d der größte gemeinsame Teiler von l und $p-1$, so gibt es zwei positive ganze Zahlen r und s, so daß

$$rl = s(p-1) + d.$$

Dann ist für jede ganze Zahl ξ

$$\xi^d \equiv (\xi^r)^l \pmod{p}.$$

Nun lassen sich aber, wie schon bewiesen, drei zu p teilerfremde Zahlen ξ, η, ζ finden, so daß

$$a\xi^d + b\eta^d + c\zeta^d \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dann ist auch

$$a(\xi^r)^l + b(\eta^r)^l + c(\zeta^r)^l \equiv 0 \pmod{p},$$

womit die Verallgemeinerung des Hurwitzschen Satzes nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 22. Oktober 1922.)

Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe.

Von

H. Weyl in Zürich.

§ 1.

Einleitung.

Führen wir im n dimensionalen Vektorraum — oder, was dasselbe besagt, im n dimensionalen linearen, zentrierten Punktraum — als Koordinatensystem n voneinander linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$ ein, so läßt sich jeder Vektor (oder „Punkt") $\mathfrak{x}$ des Vektorkörpers auf eine und nur eine Weise aus diesen Grundvektoren linear kombinieren

$$\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{e}_1 + x_2 \mathfrak{e}_2 + \ldots + x_n \mathfrak{e}_n .$$

Eine positiv-definite quadratische Form Q des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x}$ drückt sich in einem beliebigen Koordinatensystem als eine ebensolche Form der variablen Komponenten x_i von $\mathfrak{x}$ aus:

$$(1) \qquad Q(\mathfrak{x}) = \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems kann Q stets auf die Gestalt gebracht werden:

$$(2) \qquad Q(\mathfrak{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 ,$$

in welcher ihre Koeffizienten die Einheitsmatrix bilden:

$$E = \| \delta_{ik} \|, \quad \delta_{ik} = 1 \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } i = k \text{ oder } i \neq k.$$

Bei gegebenem Q soll unter der infinitesimalen Drehungsgruppe $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_Q$ die Gesamtheit derjenigen infinitesimalen linearen Abbildungen des Vektorkörpers auf sich selber verstanden werden, welche die Form Q invariant lassen. Eine einzelne solche Abbildung L erteilt jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des Vektorkörpers eine unendlich kleine Verrückung $d\mathfrak{x}$, welche linear-homogen von

$\mathfrak{x}$ abhängig ist: $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}L$; in einem Koordinatensystem drückt sie sich durch eine Matrix $L = \| \lambda_{ik} \|$ aus:

$$dx_i = \sum_k \lambda_{ik} x_k .$$

Soll dabei die Form (1) ungeändert bleiben, so muß identisch in den x die Gleichung gelten:

$$\sum_{ir} g_{ir} x_i dx_r = \sum_{ik} \left(\sum_r g_{ir} \lambda_{rk} \right) x_i x_k = 0 ,$$

d. h.

$$\sum_r (g_{ir} \lambda_{rk} + g_{kr} \lambda_{ri}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Hat Q insbesondere die Normalform (2), so lauten diese Bedingungen

$$\lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0 .$$

$\mathfrak{d}$ ist demnach eine lineare Matrixschar von $N = \frac{n(n-1)}{2}$ Parametern, nämlich — geeignete Wahl des Koordinatensystems vorausgesetzt — die Schar aller schiefsymmetrischen Matrizen. Indem wir zur Vermeidung des Unendlichkleinen die infinitesimale Verrückung durch das Geschwindigkeitsfeld ersetzen, können wir sagen: die Formeln

$$u_i = \sum_k \lambda_{ik} x_k$$

stellen dann und nur dann das Geschwindigkeitsfeld einer Drehung des Vektorkörpers dar — x_i bedeuten die Koordinaten des willkürlichen Punktes im Vektorkörper, u_i die Komponenten seiner Geschwindigkeit —, wenn die konstanten Koeffizienten λ_{ik} schiefsymmetrisch sind. Nach Lie muß jede infinitesimale Gruppe von linearen Abbildungen des Vektorkörpers der Bedingung genügen, daß mit irgend zwei Matrizen L, L^* stets auch ihre „Zusammensetzung“

$$[LL^*] = LL^* - L^*L$$

der Gruppe angehört. Bezeichnet man die spezielle infinitesimale Drehung

$$u_1 = x_2, \qquad u_2 = -x_1, \qquad u_r = 0 \qquad (\text{für } r \neq 1, 2)$$

mit $D^{(12)}$ und definiert analog $D^{(ik)}$ für irgend zwei verschiedene Indizes i und k, so bilden die N infinitesimalen Drehungen $D^{(ik)}$ mit $i < k$ offenbar eine Basis der totalen Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$. Die Zusammensetzungsformeln von $\mathfrak{d}$ lauten so:

1. es ist $[D^{(12)}, D^{(23)}] = D^{(13)}$, wenn 1, 2, 3 irgend drei verschiedene Indizes sind;

2. es ist $[D^{(12)}, D^{(34)}] = 0$, wenn 1, 2, 3, 4 irgend vier verschiedene Indizes sind.

Bisher waren alle vorkommenden Größen als reell angenommen. Beim Übergang vom reellen zum komplexen Gebiet sind zwei verschiedene Übertragungen des Begriffes der Drehung möglich:

a) als „orthogonale" Transformation; so heißen die linearen homogenen Transformationen der komplexen Variablen $x_1 x_2 \ldots x_n$, welche die quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \tag{4}$$

invariant lassen;

b) als „unitäre" Transformation; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie die positiv-definite Hermitesche Form

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_n \bar{x}_n \tag{5}$$

ungeändert lassen ($\bar{x}$ bedeutet die konjugiert-imaginäre Größe zu x).

Die Übertragung a) ist einfacher als b) durch ihren rein *algebraischen* — die Übertragung b) einfacher als a) durch ihren *definiten* Charakter. Die Gruppe der unitären Transformationen besteht, wenn man sie unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem kennzeichnen soll, aus allen linearen Transformationen, welche eine feste positiv-definite Hermitesche Form ungeändert lassen, die Gruppe der orthogonalen aus denjenigen, bei welchen eine gegebene, nicht-ausgeartete quadratische Form invariant bleibt. Denn bekanntlich kann man im komplexen Gebiet durch lineare Transformation jede positiv-definite Hermitesche Form in die Gestalt (5), jede nicht-ausgeartete quadratische Form in die Gestalt (4) bringen. Bei Beschränkung aufs Reelle umfaßt der letzte Begriff also alle $n+1$ reellen, durch ihren Trägheitsindex unterschiedenen Klassen nicht-ausgearteter quadratischer Formen, der erste nur die Klasse der positiv-definiten. Liegt ein reelles Problem vor, diejenigen linearen Transformationen betreffend, welche eine nicht-ausgeartete quadratische Form Q invariant lassen, und soll dieses Problem seine Lösung finden, welchen Trägheitsindex auch Q besitzen mag, so ist es im allgemeinen zweckmäßig, um die lästige Fallunterscheidung nach den Werten des Trägheitsindex zu beseitigen, das Problem aus dem reellen ins komplexe Gebiet, unter Verwendung der Übertragung a), zu verpflanzen.

Die vorliegende Arbeit enthält einige Beiträge zu der Frage, *durch welche inneren einfachen Eigenschaften man die Drehungsgruppe unter allen möglichen Gruppen linearer Abbildungen des n dimensionalen Vektorkörpers kennzeichnen kann.* Eine erste befriedigende Antwort auf diese Frage ergab sich bekanntlich aus dem Helmholtz-Lieschen Raumproblem, mit dessen Lösung sie geradezu identisch ist: die Drehungsgruppe ist dadurch unter allen linearen Gruppen ausgezeichnet, daß sie dem Vektor-

körper „freie Beweglichkeit“ um sein Zentrum verleiht[1]). Die Forderung von Helmholtz und Lie ist nicht rein algebraischer Natur, sie darf nicht auf die infinitesimalen Operationen der Gruppe beschränkt werden und charakterisiert die Drehungsgruppe nur, wenn die zugrunde liegende quadratische Form Q positiv-definit ist; sie ist nach dem allen sozusagen prädestiniert für die Übertragung b) aufs komplexe Gebiet. Ebenso zwingend wie die alte Auffassung einer a priori dem Raume innewohnenden und von der Materie unabhängigen metrischen Struktur zur Helmholtz-Lieschen Kennzeichnung der Drehungsgruppe führt, läßt die moderne, von der Einsteinschen Relativitätstheorie ausgebildete Auffassung, nach welcher die Maßstruktur veränderungsfähig ist und in kausaler Abhängigkeit von der Materie steht, eine andere Eigenschaft der Drehungsgruppe als die entscheidende erkennen (Nr. 7 und 8 der eben zitierten Vorlesungen). Da das metrische Feld der vierdimensionalen wirklichen Welt gar nicht positiv-definit ist, sondern den Trägheitsindex 1 besitzt, und nach der allgemeinen Relativitätstheorie nur von infinitesimalen Bindungen regiert wird, so bezieht sich diese neue Eigenschaft auf den Fall einer nicht-ausgearteten quadratischen Form Q *von beliebigem Trägheitsindex* und handelt lediglich von den *infinitesimalen* Drehungen; sie trägt zudem rein algebraischen Charakter. Sie ist also geeignet für die Übertragung a) aufs komplexe Gebiet, und wirklich habe ich beweisen können, daß eine infinitesimale Gruppe von linearen Abbildungen des komplexen n dimensionalen Vektorkörpers, welche die besagte Eigenschaft besitzt, bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems mit der infinitesimalen Euklidischen Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$, der infinitesimalen Gruppe aller schiefsymmetrischen Matrizen, identisch ist. Den ersten in der Mathem. Zeitschr. **12** (1922), S. 114 erschienenen Beweis habe ich in R, Anhang 12, durch einen wesentlich einfacheren ersetzt. An ihn schließen sich die folgenden Untersuchungen an. Wir bewegen uns also fortan immer im komplexen Gebiet und haben es mit der Aufgabe zu tun, die infinitesimale *orthogonale* Gruppe (nicht die unitäre) zu charakterisieren.

§ 2.

Charakteristische Eigenschaften der Drehungsgruppe.

Im n dimensionalen Vektorkörper — der ein zentrierter n dimensionaler affiner Raum ist — bilden die durch das Zentrum O gehenden Strahlen den $(n-1)$ dimensionalen projektiven Strahlenkörper; jede lineare Ab-

[1]) Vgl. die genaue Formulierung in der 5. meiner spanischen Vorlesungen über die mathematische Analyse des Raumproblems (deutsche Ausgabe, Springer 1923; ich zitiere sie im folgenden mit R).

bildung des Vektorkörpers ist zugleich eine projektive Abbildung des Strahlenkörpers. Zu einer nicht-ausgearteten quadratischen Form (1) gehört eine symmetrische Bilinearform zweier willkürlicher Vektoren $\mathfrak{x} = (x_i)$, $\mathfrak{y} = (y_i)$:

$$Q(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \sum_{ik} g_{ik} y_i x_k .$$

Mit Bezug auf eine solche quadratische Form heißen zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zueinander senkrecht, wenn $Q(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = 0$ ist. Weil die Form nicht-ausgeartet ist, steht nur der Vektor 0 auf allen Vektoren senkrecht. Ist $\mathfrak{a}$ mit den Komponenten $x_i = a_i$ ein von 0 verschiedener Vektor, so bilden die zu ihm senkrechten Vektoren eine $(n-1)$ dimensionale Ebene, deren Gleichung

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0$$

die Koeffizienten (Ebenenkoordinaten)

$$\alpha_i = \sum_k g_{ik} a_k \tag{6}$$

hat. Es gelingt leicht, den Begriff des Senkrechtstehens statt von der Form Q von der zugehörigen infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{d}_Q = \mathfrak{d}$ aus zu definieren, welche aus allen infinitesimalen, Q in sich überführenden linearen Abbildungen des Vektorkörpers besteht. Sei $\mathfrak{g}$ irgendeine infinitesimale Gruppe linearer Operationen, $\mathfrak{a}$ ein von 0 verschiedener Punkt und E eine $(n-1)$ dimensionale Vektorebene; ich nenne E *konjugiert* zu $\mathfrak{a}$ (in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{g}$), wenn bei jeder Operation von $\mathfrak{g}$ die unendlichkleine Verrückung, welche der Punkt $\mathfrak{a}$ erfährt, ein in der Ebene E liegender Vektor ist. Es ist dann E auch konjugiert zu allen Vektoren, welche Multipla von $\mathfrak{a}$ sind, welche auf demselben Strahl wie $\mathfrak{a}$ liegen. „Senkrecht" bedeutet: konjugiert in bezug auf die Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$. Hier stoßen wir auf die einfachste Eigenschaft der infinitesimalen Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$:

Zu jedem Strahl gibt es eine und nur eine konjugierte Ebene (in bezug auf $\mathfrak{d}$):

Zu dem Strahl mit den homogenen Koordinaten a_i gehört die konjugierte Ebene mit den homogenen Koordinaten α_i, welche durch die Gleichungen (6) gegeben sind. Q liege insbesondere in der Normalform (2) vor; dann vereinfachen sich jene Gleichungen zu $\alpha_i = a_i$. Ist umgekehrt die Ebene (α_i) konjugiert zu dem Strahl a_i, so muß

$$\sum_i \alpha_i u_i = 0 \quad \text{sein, wenn} \quad u_i = \sum_k \lambda_{ik} a_k$$

ist und λ_{ik} irgendein schiefsymmetrisches System von Zahlen bedeutet. Das liefert offenbar die Gleichungen

$$\alpha_i a_k - \alpha_k a_i = 0$$

für alle Indexpaare $i \neq k$; und daraus folgt bekanntlich

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n,$$

wenn, wie vorauszusetzen war, nicht alle a_i verschwinden. — Es geht daraus noch hervor, daß die Fortschreitungsrichtungen des Punktes $\mathfrak{a} = (a_i)$ unter dem Einfluß aller infinitesimalen Operationen der Drehungsgruppe die konjugierte Ebene E restlos erfüllen: *jede* in E gelegene Richtung tritt als eine solche Fortschreitungsrichtung auf. Denn jene Fortschreitungsrichtungen erfüllen eine lineare Mannigfaltigkeit; hätte diese weniger als $n-1$ Dimensionen, so würden die Richtungen wenigstens zwei unabhängigen linearen homogenen Gleichungen genügen, d. h. es gäbe zu $\mathfrak{a}$ ein ganzes Büschel von konjugierten Ebenen.

Die Beziehung zwischen Strahl (a_i) und konjugierter Ebene (α_i) ist überdies eineindeutig. Die Linearität der verknüpfenden Gleichungen (6) bedeutet, daß diese Beziehung projektiven Charakter trägt, die Symmetrie der Koeffizienten g_{ik} oder der Bilinearform $Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, daß es sich genauer um eine Involution handelt. Durchläuft also der Strahl ein Strahlenbüschel, so beschreibt die konjugierte Ebene ein Ebenenbüschel; liegt der Strahl $\mathfrak{b}$ in der zu $\mathfrak{a}$ konjugierten Ebene, so liegt umgekehrt $\mathfrak{a}$ in der zu $\mathfrak{b}$ konjugierten Ebene. Zusammengefaßt:

I. *Mit Bezug auf* $\mathfrak{d}$ *gehört zu jedem Strahl eine eindeutig bestimmte konjugierte Ebene; die Beziehung zwischen Strahl und konjugierter Ebene ist in dem projektiven Strahlenkörper eine (nicht-ausgeartete) projektive Involution.*

Damit ist alles gesagt, was sich über das durch $\mathfrak{d}$ begründete Verhältnis der Konjugation, das Senkrechtstehen, sagen läßt; und es erhebt sich die natürliche Frage, ob durch diese Beschreibung die Drehungsgruppe vollständig charakterisiert ist oder ob es noch andere Gruppen außer $\mathfrak{d}$ gibt, welche ihr genügen. Es sei $\mathfrak{g}$ irgendeine Gruppe von der durch I. geschilderten Art. Ordnet sie dem willkürlichen Strahl (x_i) die eindeutig bestimmte konjugierte Ebene (ξ_i) zu, so fordert I., daß der Zusammenhang zwischen zwischen (x_i) und (ξ_i) durch lineare Gleichungen

$$\xi_i = \sum_k g_{ik} x_k$$

vermittelt wird mit konstanten symmetrischen Koeffizienten g_{ik}, deren Determinante $\neq 0$ ist. Durch geeignete Wahl des Kordinatensystems

kann man bewirken, daß die g_{ik} die Einheitsmatrix bilden; dann haben wir $\xi_i = x_i$. Ist

$$u_i = \sum_k \lambda_{ik} x_k$$

das Geschwindigkeitsfeld irgendeiner Operation von $\mathfrak{g}$, so soll identisch in x_i gelten:

$$\sum_i \xi_i u_i = 0, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{ik} \lambda_{ik} x_i x_k = 0.$$

Die λ_{ik} sind folglich schiefsymmetrisch, oder $\mathfrak{g}$ ist einer Untergruppe der Drehungsgruppe. Die Frage reduziert sich damit auf die folgende:

A. *Existiert in der Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}$ *eine Untergruppe* $\mathfrak{d}'$ *von der Beschaffenheit, daß für jeden vom Zentrum O verschiedenen Punkt A die Fortschreitungsrichtungen, welche die infinitesimalen Operationen von* $\mathfrak{d}'$ *dem Punkte A erteilen, die ganze zum Vektor* $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ *senkrechte Ebene erfüllen* (und nicht bloß eine lineare Teilmannigfaltigkeit von weniger als $n-1$ Dimensionen)?

Ich werde beweisen (Satz A), daß *eine derartige Untergruppe* $\mathfrak{d}'$ *notwendig mit der vollen Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}$ *zusammenfällt, wenn die Dimensionszahl* $n \neq 7$ *und* 8 *ist; im Falle der Dimensionszahl* $n = 7$ *und* $n = 8$ *existiert aber außer der vollen Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}_7$ *und* $\mathfrak{d}_8$ *von* 21 *bzw.* 28 *Parametern noch je eine Untergruppe* $\mathfrak{d}_7^*$ *bzw.* $\mathfrak{d}_8^*$ *von der verlangten Art, welche 7 Parameter weniger besitzt.* Die beiden merkwürdigen Ausnahmegruppen werden in § 3 genauer beschrieben werden. Die auf den ersten Blick sich darbietenden Eigenschaften I. lösen also das Problem der Charakterisierung der Drehungsgruppe in allen Räumen, nur nicht im 7- und 8 dimensionalen.

Für die folgenden Ausführungen heben wir aus I. insbesondere die negative Tatsache heraus:

I′. *Niemals besitzen zwei verschiedene Strahlen eine gemeinsame konjugierte Ebene.*

Wenn wir von einer Gruppe $\mathfrak{g}$ die Eigenschaft I′ postulieren, so soll damit natürlich nicht gesagt sein, daß mit Bezug auf $\mathfrak{g}$ überhaupt zu jedem Strahl eine konjugierte Ebene gehört.

Wir gehen zu einem zweiten Komplex von Merkmalen der Drehungsgruppe über, welche nicht ganz so offen zutage liegen. Sie enthalten die Antwort auf die Frage, ob in der Gruppe $\mathfrak{d}_Q$ Operationen existieren, welche eine vorgegebene, durch O hindurchgehende $m$dimensionale lineare Mannigfaltigkeit ($0 \leqq m \leqq n-1$) Punkt für Punkt fest lassen, und wie viele. Statt „lineare Mannigfaltigkeit durch O“ gebrauche ich das kürzere Wort „Ebene“; fehlt eine Angabe über die Dimensionszahl, so bedeutet Ebene wie bisher: $(n-1)$ dimensionale Ebene. Man findet zunächst:

II′. *Zu einer willkürlich vorgegebenen* $(n-1)$ *dimensionalen Ebene existiert keine Operation der infinitesimalen Drehungsgruppe, welche die Ebene Punkt für Punkt festläßt* (außer der Identität 0, die alle Punkte festläßt).

Wieder werde Q in der Normalform vorausgesetzt, die Gleichung der vorgegebenen Ebene laute

$$\sum_i \alpha_i x_i = 0. \tag{7}$$

Die Forderung, daß sie bei der durch die schiefsymmetrische Matrix $L = \| \lambda_{ik} \|$ dargestellten Operation Punkt für Punkt fest bleiben soll, besagt, daß aus (7) die Gleichungen

$$\sum_k \lambda_{ik} x_k = 0 \tag{8}$$

folgen sollen. Jede der n Linearformen auf der linken Seite von (8) muß also ein Multiplum der Linearform (7) sein:

$$\lambda_{ik} = \beta_i \alpha_k .$$

Die Schiefsymmetrie von L drückt sich dadurch aus, daß identisch in x

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} x_i x_k = \sum_i \beta_i x_i \cdot \sum_i \alpha_i x_i = 0$$

ist. Daraus folgt das identische Verschwinden des ersten Faktors (denn der zweite ist nicht identisch $= 0$); d. i. $\beta_i = 0$, $\lambda_{ik} = 0$.

II″. *Zu einer beliebig gegebenen* $(n-2)$ *dimensionalen Ebene* E_2 *gibt es genau eine linear unabhängige Operation von* $\mathfrak{d}_Q$, *welche alle Punkte der Ebene festläßt.* — Allgemein:

II^r. *Zu einer willkürlich vorgegebenen* $(n-r)$ *dimensionalen Ebene* $E_r (1 \leqq r \leqq n)$ *existieren genau* $\frac{r(r-1)}{2}$ *linear unabhängige Operationen von* $\mathfrak{d}_Q$, *welche die Ebene Punkt für Punkt festlassen.*

Beim Beweise von II^r normieren wir durch geeignete Wahl des Koordinatensystems nicht die quadratische Grundform, sondern lieber die Gleichungen der Ebene E_r:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; \ldots, \; x_r = 0;$$

dann müssen wir Q in der allgemeinen Gestalt (1) beibehalten. Daß eine infinitesimale Operation, welche durch die Matrix $L = \| \lambda_{ik} \|$ dargestellt wird, die sämtlichen Punkte von E_r festläßt, besagt: für solche Vektoren $\mathfrak{x}$, deren erste r Komponenten x_i verschwinden, ist $\sum_k \lambda_{ik} x_k = 0$, oder in der Matrix $\| \lambda_{ik} \|$ verschwinden die $n-r$ letzten Spalten $(k = r+1, \ldots, n)$.

Für die erste Spalte einer willkürlichen Matrix L, deren $n-r$ letzte Spalten Null sind, enthält (3) die folgenden Gleichungen:

$$\sum_r g_{1r}\lambda_{r1} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_r g_{kr}\lambda_{r1} = 0 \quad \text{für} \quad k = r+1, \ldots, n.$$

Das sind $n-r+1$ unabhängige Gleichungen für die n Unbekannten λ_{r1}; sie haben demnach $r-1$ linear unabhängige Lösungen. Hat man die erste Spalte λ_{r1} diesen Gleichungen gemäß gewählt, so bekommt man für die zweite Spalte die Bedingungen:

$$\sum_r g_{1r}\lambda_{r2} = -\sum_r g_{2r}\lambda_{r1}, \quad \sum_r g_{2r}\lambda_{r2} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_r g_{kr}\lambda_{r2} = 0$$
$$\text{für } k = r+1, \ldots, n.$$

Das sind $n-r+2$ unabhängige Gleichungen für die zweite Spalte, und diese besitzen $r-2$ unabhängige Lösungen. Indem man so forfährt bis zur r-ten Spalte von L, erschöpft man die sämtlichen Gleichungen (3), sofern sie nicht identisch erfüllt sind, und es findet sich die behauptete Anzahl

$$(r-1)+(r-2)+\ldots+0 = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Der Frage, inwieweit die Tatsachen II (II′, II″, …, II^n) für die Drehungsgruppe charakteristisch sind, bin ich nicht nachgegangen.

Eine dritte Gruppe von Eigenschaften ist diejenige, zu welcher ich durch die Analyse des Raumproblems vom Standpunkt der Relativitätstheorie geführt wurde; für den rein mathematisch eingestellten Beobachter liegen sie ziemlich versteckt und waren infolgedessen vorher niemals bemerkt worden. Sie stützen sich auf den Begriff der zu einer infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{g}$ linearer Operationen gehörigen symmetrischen Doppelmatrix. So nenne ich ein symmetrisch-bilineares Gesetz

$$u_i = \sum_{rs} \lambda_{ir,s} x_s y_r \quad (\lambda_{is,r} = \lambda_{ir,s}),$$

das zwei willkürlichen Punkten $\mathfrak{x} = (x_i)$, $\mathfrak{y} = (y_i)$ des Vektorkörpers einen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{u} = (u_i)$ so zuordnet, daß sich für jeden festen Punkt $\mathfrak{y}$ das Geschwindigkeitsfeld einer zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Operation ergibt. In Koordinatendarstellung besteht die symmetrische Doppelmatrix also aus einer Reihe von n zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Matrizen

$$L_1 = \| \lambda_{ir,1} \|, \quad L_2 = \| \lambda_{ir,2} \|, \quad \ldots, \quad L_n = \| \lambda_{ir,n} \|,$$

welche die Bedingung erfüllen, daß die s-te Spalte von L_r gleich der r-ten Spalte von L_s ist (für $r, s = 1, 2, \ldots, n$). Es bestehen die Tatsachen:

III. *Zu $\mathfrak{d}$ gehört keine andere symmetrische Doppelmatrix als* 0.

III′. *Die Anzahl der Parameter von* $\mathfrak{d}$ *ist die höchste, welche mit* III. *verträglich ist, nämlich* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ich fügte noch ein der einzelnen Drehung, nicht der Drehungsgruppe anhaftendes einfaches Merkmal hinzu:

III″. *Die Spur jeder Matrix, welche eine infinitesimale Operation von* $\mathfrak{d}$ *darstellt, ist* $= 0$ (die Drehungen sind volumtreu).

Für alle Dimensionszahlen ohne Ausnahme gilt der Satz, daß *die Drehungsgruppe die einzige ist, welche diese zusammengehörigen Forderungen erfüllt* (*Hauptheorem*). Aus dem in *R*, Anh. 12, mitgeteilten Beweis ließ sich darüber hinaus die Entbehrlichkeit der Zusatzbedingung III″ erkennen, außer im Falle der Dimensionszahl $n = 2$. Ich skizziere die Anlage jenes Beweises. Die niedersten Dimensionszahlen $n = 1$ und 2 werden direkt erledigt. Für $n \geqq 3$ kann von einer Gruppe $\mathfrak{g}$, welche den Forderungen III und III′ genügt, leicht gezeigt werden, daß sie die Eigenschaften I′ und II′ besitzt. Die weiteren Schlüsse stützen sich dann fast ausschließlich auf I′ und II′; sie führen zu dem Ergebnis, daß $\mathfrak{g}$ in der durch Hinzufügung der Dilatation erweiterten Drehungsgruppe $\bar{\mathfrak{d}}$ als Untergruppe enthalten sein muß. Die Bedingung verschwindender Spur, III″, reduziert $\bar{\mathfrak{d}}$ auf $\mathfrak{d}$, und die durch III′ geforderte Parameterzahl hat dann zur Folge, daß die Matrixschar $\mathfrak{g}$ nicht bloß ein Teil von $\mathfrak{d}$, sondern $= \mathfrak{d}$ sein muß. Aber nicht nur am Schluß des Beweises, sondern auch an einer entscheidenden Stelle mitteninne greife ich einmal direkt auf die Forderungen III und III′ zurück. Das erschien mir als ein Schönheitsfehler des Beweises; zur vollen Aufklärung des Sachverhalts war jedenfalls die Frage zu beantworten, wie weit die Eigenschaften I′ und II′ tragen; und diese Antwort soll hier gegeben werden.

Problem B. *Es sollen alle infinitesimalen Gruppen* $\mathfrak{g}$ *linearer Transformationen konstruiert werden, welche die folgenden beiden Forderungen erfüllen:*

a) *keine von* 0 *verschiedene Operation der Gruppe läßt alle Punkte einer* $(n-1)$ *dimensionalen Ebene fest* (II′);

b) *niemals besitzen zwei verschiedene Strahlen eine gemeinsame konjugierte Ebene in bezug auf* $\mathfrak{g}$ (I′).

Die niedersten Dimensionszahlen $n = 1$ und 2 müssen ganz abgesondert werden. Für $n = 1$ bringt a) es mit sich, daß $\mathfrak{g}$ nur aus der Identität (Matrix 0) bestehen kann. Für $n = 2$ sagt a) über eine beliebige von 0 verschiedene zu $\mathfrak{g}$ gehörige Matrix $L = \| \lambda_{ik} \|$ dies aus: daß die Gleichungen

$$\sum_k \lambda_{ik} x_k = 0$$

keine andere Lösung besitzen dürfen als $x_1 = x_2 = 0$; denn sonst erhielte man einen Strahl (eine 1 dimensionale Ebene), welche bei der durch L dargestellten infinitesimalen Operation Punkt für Punkt fest bliebe. Es muß also die Determinante $|\lambda_{ik}| + 0$ sein. Infolgedessen kann die Gruppe $\mathfrak{g}$ höchstens einparametrig sein. Daß sie nur aus 0 besteht, wird durch b) ausgeschlossen. Die zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Matrizen sind also die Multipla einer festen Matrix, deren Determinante nicht verschwindet. Und umgekehrt erfüllt die so definierte Gruppe $\mathfrak{g}$ tatsächlich die Bedingungen a) und b).

Fortan setzen wir $n \geqq 3$ voraus. Enthält eine infinitesimale Gruppe $\mathfrak{g}$ die durch

$$dx_i = x_i$$

dargestellte Dilatation nicht, so verstehen wir unter der erweiterten Gruppe $\bar{\mathfrak{g}}$ diejenige, welche aus $\mathfrak{g}$ durch Hinzufügung der Dilatation entsteht; aus der allgemeinen Matrix L der Gruppe $\mathfrak{g}$ erhält man alle Matrizen von $\bar{\mathfrak{g}}$ nach der Formel

$$\lambda E + L, \tag{9}$$

wo λ ein weiterer unabhängiger Parameter ist. In diesem Sinne wurde schon oben von der erweiterten Drehungsgruppe $\bar{\mathfrak{d}}$ gesprochen. Die Forderung a) begrenzt die Gruppe $\mathfrak{g}$ nach oben, b) nach unten; d. h. die Eigenschaft a) teilt eine Gruppe $\mathfrak{g}$ mit jeder in ihr enthaltenen, die Eigenschaft b) mit jeder sie umfassenden Gruppe. $\bar{\mathfrak{d}}$ genügt also, so gut wie $\mathfrak{d}$ selber, der Forderung b). Sie erfüllt aber (für $n \geqq 3$) auch die Bedingung a). Denn läßt die infinitesimale Operation, welche durch die Matrix (9) mit schiefsymmetrischem $L = \| \lambda_{ik} \|$ dargestellt wird, die Ebene (7) Punkt für Punkt fest, so schließen wir wie oben zunächst auf die Gleichungen

$$\lambda_{ik} + \lambda \delta_{ik} = \beta_i \alpha_k;$$

und daraus ergibt sich, wenn für willkürliche Vektoren $\mathfrak{x} = (x_i)$, $\mathfrak{y} = (y_i)$ gesetzt wird:

$$\sum_i \alpha_i x_i = \alpha(\mathfrak{x}), \quad \sum_i \beta_i x_i = \beta(\mathfrak{x}), \quad \sum_i x_i y_i = Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}),$$

identisch in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$:

$$2\lambda \cdot Q(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \alpha(\mathfrak{x})\beta(\mathfrak{y}) + \alpha(\mathfrak{y})\beta(\mathfrak{x}).$$

Wählt man hierin für $\mathfrak{y}$ einen konstanten, von 0 verschiedenen Vektor, welcher den beiden Gleichungen

$$\alpha(\mathfrak{y}) = 0, \qquad \beta(\mathfrak{y}) = 0$$

genügt, so ergibt sich $\lambda = 0$; und dann weiter wie oben auch $\lambda_{ik} = 0$. Es genügen also, für jedes $n \geqq 3$, die Gruppen $\mathfrak{d}$ und $\bar{\mathfrak{d}}$ den Forderungen

a) und b). Für $n = 7$ und $n = 8$ besitzen a fortiori die vorhin erwähnten Untergruppen $\mathfrak{d}_7^*$ bzw. $\mathfrak{d}_8^*$ und die aus ihnen durch Erweiterung hervorgehenden $\bar{\mathfrak{d}}_7^*$ und $\bar{\mathfrak{d}}_8^*$ die Eigenschaft a); nach dem, was über diese Untergruppen gesagt wurde, gilt für sie aber auch der Satz I′. $\mathfrak{d}_7^*$ und $\bar{\mathfrak{d}}_7^*$, $\mathfrak{d}_8^*$ und $\bar{\mathfrak{d}}_8^*$ sind also für $n = 7$ und $n = 8$ ebenfalls Gruppen, welche den Bedingungen a) und b) Genüge leisten. Damit ist aber die Aufzählung beendet. Unsere Konstruktion wird nämlich zu den folgenden beiden Sätzen führen:

Satz B′. *Für* $n \geqq 3$ *sind alle infinitesimalen Gruppen mit den Eigenschaften* a) *und* b) *in der erweiterten Drehungsgruppe* $\bar{\mathfrak{d}}$ *als Untergruppen enthalten.*

Satz B″. *Genauer: wenn* $n \neq 7$ *und* 8, *sind die Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}$ *und die erweiterte Drehungsgruppe* $\bar{\mathfrak{d}}$ *die einzigen Gruppen dieser Art. Für* $n = 7$ *treten die Gruppen* $\mathfrak{d}_7^*$, $\bar{\mathfrak{d}}_7^*$ *hinzu, für* $n = 8$ *die Gruppen* $\mathfrak{d}_8^*$, $\bar{\mathfrak{d}}_8^*$.

Der Satz B′ genügt bereits zur Bewältigung des mit dem Raumproblem in Verbindung stehenden Haupttheorems; die Antwort auf die Frage A ist lediglich ein Korollar zum Satze B″.

Es folgt jetzt zunächst die Beschreibung der Ausnahmegruppen $\mathfrak{d}_7^*$ und $\mathfrak{d}_8^*$.

§ 3.

Die Ausnahmegruppen.

$\mathfrak{d}_8^*$. Wir nehmen die quadratische Grundform in der Gestalt an

$$Q = 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' + x_4 x_4');$$

die unabhängigen Variablen sind der Reihe nach

$$x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2',\ x_3,\ x_3',\ x_4,\ x_4'. \tag{10}$$

Die Matrix, welche eine willkürliche infinitesimale Drehung darstellt, sieht dann so aus:

(11)

ϱ_1	0	λ_{12}	μ_{12}	λ_{13}	μ_{13}	λ_{14}	μ_{14}
0	$-\varrho_1$	μ'_{12}	λ_{12}	μ'_{13}	λ'_{13}	μ'_{14}	λ'_{14}
λ_{21}	μ_{21}	ϱ_2	0	λ_{23}	μ_{23}	λ_{24}	μ_{24}
μ'_{21}	λ_{21}	0	$-\varrho_2$	μ'_{23}	λ'_{23}	μ'_{24}	λ'_{24}
λ'_{31}	μ_{31}	λ'_{32}	μ_{32}	ϱ_3	0	λ_{34}	μ_{34}
μ'_{31}	λ_{31}	μ'_{32}	λ_{32}	0	$-\varrho_3$	μ'_{34}	λ'_{34}
λ'_{41}	μ_{41}	λ'_{42}	μ_{42}	λ'_{43}	μ_{43}	ϱ_4	0
μ_{41}	λ_{41}	μ_{42}	λ_{42}	μ'_{43}	λ_{43}	0	$-\varrho_4$

Die Parameter $\lambda_{ik}, \lambda'_{ik}, \mu_{ik}, \mu'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ sind schiefsymmetrisch; weitere Bedingungen für die Parameter treten nicht auf. Die lineare 28 parametrige Mannigfaltigkeit aller dieser Matrizen bildet die Gruppe $\mathfrak{d}_8$. Die „Ausnahmegruppe“ $\mathfrak{d}_8^*$ ist diejenige lineare Teilschar von $\mathfrak{d}_8$, welche durch die folgenden sieben Bedingungen charakterisiert wird:

$$(12_\mu) \qquad \begin{cases} \mu_{23} = \mu'_{14}, & \mu_{31} = \mu'_{24}, & \mu_{12} = \mu'_{34}, \\ \mu_{14} = \mu'_{23}, & \mu_{24} = \mu'_{31}, & \mu_{34} = \mu'_{12}; \end{cases}$$

$$(12_\varrho) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0.$$

Aus irgend zwei Matrizen L, L^* von der Form (11) entsteht durch Zusammensetzung $[LL^*]$ eine Matrix von derselben Gestalt; um sich davon zu überzeugen, daß $\mathfrak{d}_8^*$ eine Gruppe ist, muß man zeigen, daß, wenn L und L^* den Gleichungen (12) genügen, dasselbe für $[LL^*]$ zutrifft. Wegen der Gleichberechtigung der vier Indizes 1 2 3 4 genügt es, die beiden Gleichungen

$$\mu_{23} = \mu'_{14} \quad \text{und} \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0$$

für die zusammengesetzte Matrix zu verifizieren. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\alpha\beta^* - \beta\alpha^* = [\alpha\beta],$$

so besagt die erste Gleichung

$$[\lambda'_{21}\mu_{13}] + [\mu_{21}\lambda'_{13}] + [\varrho_2\mu_{23}] + [0\lambda'_{23}] + [\lambda_{23}0] - [\mu_{23}\varrho_3] + [\lambda_{24}\mu_{43}] + [\mu_{24}\lambda_{43}]$$
$$= [0\lambda_{14}] - [\varrho_1\mu'_{14}] + [\mu'_{12}\lambda_{24}] + [\lambda'_{12}\mu'_{24}] + [\mu'_{13}\lambda_{34}] + [\lambda'_{13}\mu'_{34}] + [\mu'_{14}\varrho_4] + [\lambda'_{14}0]$$

oder

$$(13) \qquad \begin{aligned} &[\varrho_2 + \varrho_3, \mu_{23}] + [\varrho_1 + \varrho_4, \mu'_{14}] \\ &+ [\lambda'_{12}, \mu_{31} - \mu'_{24}] + [\lambda'_{13}, \mu_{12} - \mu'_{34}] \\ &+ [\lambda_{42}, \mu_{34} - \mu'_{12}] - [\lambda_{43}, \mu_{24} - \mu'_{31}] = 0. \end{aligned}$$

Bei der Ausrechnung ist zu berücksichtigen, daß jedes $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ sein Vorzeichen ändert, wenn man seine beiden Indizes vertauscht, und daß

$$[\beta\alpha] = -[\alpha\beta], \qquad [\alpha 0] = [0\alpha] = 0$$

ist. Man sieht, daß die behauptete Relation in der Tat aus den Gleichungen (12) für L und L^* folgt. Die Summe $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4$ für die zusammengesetzte Matrix hat den Wert

$$\sum_{(i \neq k)} [\mu_{ik}\mu'_{ki}] = 2 \sum_{(i<k)} [\mu_{ik}\mu'_{ki}].$$

Von den sechs Gliedern der sich über alle Indexpaare ik mit $i < k$ erstreckenden Summe sind aber je zwei entgegengesetzt gleich; z. B.

$$[\mu_{23}\mu'_{32}] = [\mu'_{14}\mu_{41}] = -[\mu_{14}\mu'_{41}].$$

Ordnet man den Kolonnen der Matrix (11) der Reihe nach die Variablen (10) zu, ihren Zeilen der Reihe nach die Größen

$$y'_1, y_1, y'_2, y_2, y'_3, y_3, y'_4, y_4,$$

und multipliziert jedes Produkt yx mit demjenigen Koeffizienten der

Matrix, welcher im Kreuzungspunkt der Zeile y mit der Kolonne x steht, so ergibt sich durch Addition aller Glieder, unter Berücksichtigung der Relationen (12), der folgende Ausdruck

$$\begin{aligned} L(xy) = {} & \varrho_1 (x_1 y_1' - x_1' y_1) + \cdots \\ & + \lambda_{12} (x_2 y_1' - x_1' y_2) + \cdots + \lambda_{12}' (x_2' y_1 - x_1 y_2') + \cdots \\ & + \mu_{12} \{ (x_2' y_1' - x_1' y_2) + (x_4 y_3 - x_3 y_4) \} + \cdots . \end{aligned}$$

In der ersten Zeile sollen an Stelle von 1 sukzessive die Indizes 1, 2, 3, 4 gesetzt werden, in der zweiten und dritten Zeile an Stelle des Paares 1, 2 alle sechs Paare ik mit $i < k$. Daß $\mathfrak{d}_8^*$ die im Problem A geforderte Eigenschaft besitzt, heißt folgendes: Es seien x, y irgend zwei Systeme von je acht Zahlen, von denen das erste nicht aus lauter Nullen besteht; der Ausdruck $L(xy)$ möge verschwinden für alle Werte der Größen λ, λ', μ und alle Größen ϱ, welche der Gleichung (12_ϱ) genügen. Dann sind die y proportional zu den x[2]). Die Voraussetzungen lauten

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1 y_1' - x_1' y_1 = x_2 y_2' - x_2' y_2 = \ldots (= \alpha); \\ x_1 y_2' - x_2 y_1 = 0, \ldots; \quad x_2 y_1' - x_1' y_2 = 0, \ldots; \\ (x_1' y_2' - x_2' y_1') + (x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0, \ldots . \end{cases}$$

Wir betrachten die zusammengehörigen Paare wie (x_1, y_1) oder (x_1', y_1'). Ist keines der gestrichenen und auch keines der ungestrichenen Paare $= (0, 0)$, so ergibt sich die Behauptung schon allein aus den in der zweiten Zeile stehenden Gleichungen. Sie lehren z. B., daß die drei Verhältnisse

$$(15_1) \qquad x_2 : y_2, \; x_3 : y_3, \; x_4 : y_4 \text{ gleich } x_1' : y_1'$$

sind; ebenso

$$(15_2) \qquad x_1 : y_1, \; x_3 : y_3, \; x_4 : y_4 \text{ gleich } x_2' : y_2'.$$

Da beide Mal das gemeinsame $x_3 : y_3$ auftritt, stimmen auch die Verhältnisse (15_2) notwendig überein mit (15_1); und so ergibt sich, daß alle Verhältnisse $x_i : y_i$ und $x_i' : y_i'$ einander gleich sind. Wir nehmen zweitens an, daß weder alle gestrichenen Paare $= (0, 0)$ sind, noch alle ungestrichenen, daß aber etwa unter den gestrichenen wenigstens eines vorkommt, (x_1', y_1'), welches $= (0, 0)$ ist. Dann ist $\alpha = 0$, und wir ziehen noch die Gleichungen der ersten Zeile mit heran. Wenn z. B. $(x_2', y_2') \neq (0, 0)$ ist, erhalten wir

$$x_1 : y_1, \; x_2 : y_2, \; x_3 : y_3, \; x_4 : y_4 = x_2' : y_2'.$$

[2]) Sind $\xi', \eta', \ldots$ Zahlen, welche nicht alle Null sind, so soll eine Proportion

$$\xi : \eta : \ldots = \xi' : \eta' : \ldots$$

besagen, daß mit einem gewissen Faktor τ die Gleichungen gelten: $\xi = \tau \xi', \; \eta = \tau \eta', \ldots$. $\tau \neq 0$ wird *nicht* gefordert; ist aber $\tau \neq 0$, so ist die Proportion umkehrbar.

Unter den vier Paaren links ist sicher eines $\neq (0, 0)$, etwa (x, y); dann folgt hieraus durch Umkehrung der Proportionen

$$x_i : y_i = x : y \text{ für } i = 1, 2, 3, 4 \text{ und } x_2' : y_2' = x : y.$$

Natürlich ist auch $x_1' : y_1' = x : y$; ob also $(x_i', y_i') = (0, 0)$ ist oder nicht, auf jeden Fall ergibt sich $x_i' : y_i' = x : y$. Das alles zusammen enthält die behauptete Proportionalität. Sind drittens alle gestrichenen oder alle ungestrichenen Paare $(x\,y) = (0\,0)$, etwa alle gestrichenen, so sind die Gleichungen der ersten und zweiten Zeile ohne weiteres erfüllt, und die der dritten, die jetzt erst in Funktion treten, lauten

$$x_i y_k - x_k y_i = 0.$$

Daraus folgt abermals die Behauptung.

$\mathfrak{d}_7^*$. Im Falle $n = 7$ liege die quadratische Grundform in der folgenden Gestalt vor

$$Q = 4(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3') + x^2;$$

$x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', x$ sind die unabhängigen Variablen. Wir schreiben wieder die allgemeine Matrix der infinitesimalen Drehungsgruppe $\mathfrak{d}_Q$ an:

16)

$\varrho_1 \quad 0$ $0 \quad -\varrho_1$	$\lambda_{12} \quad \mu_{12}$ $\mu_{12}' \quad \lambda_{12}'$	$\lambda_{13} \quad \mu_{13}$ $\mu_{13}' \quad \lambda_{13}'$	μ_1' μ_1
$\lambda_{21}' \quad \mu_{21}$ $\mu_{21}' \quad \lambda_{21}$	$\varrho_2 \quad 0$ $0 \quad -\varrho_2$	$\lambda_{23} \quad \mu_{23}$ $\mu_{23}' \quad \lambda_{23}'$	μ_2' μ_2
$\lambda_{31}' \quad \mu_{31}$ $\mu_{31}' \quad \lambda_{31}$	$\lambda_{32}' \quad \mu_{32}$ $\mu_{32}' \quad \lambda_{32}$	$\varrho_3 \quad 0$ $0 \quad -\varrho_3$	μ_3 μ_3
$-2\mu_1, \; -2\mu_1'$	$-2\mu_2, \; -2\mu_2'$	$-2\mu_3, \; -2\mu_3'$	0

Die Größen mit Doppelindizes sind schiefsymmetrisch, im übrigen sind die Parameter voneinander unabhängig. $\mathfrak{d}_7^*$ wird definiert durch die Gleichungen

$$(17_\mu) \qquad \begin{cases} \mu_1 = \mu_{23}, & \mu_2 = \mu_{31}, & \mu_3 = \mu_{12}, \\ \mu_1' = \mu_{23}', & \mu_2' = \mu_{31}', & \mu_3' = \mu_{12}'; \end{cases}$$

$$(17_\varrho) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0.$$

Man überzeuge sich auf ähnliche Weise wie bei $n = 8$ davon, daß $\mathfrak{d}_7^*$ eine Gruppe ist und die im Problem A geforderte Eigenschaft besitzt. Den Ausdruck $L(x\,y)$ erhält man hier, wenn man den Kolonnen der Matrix (16) der Reihe nach die Größen

$$x_1, \; x_1', \; x_2, \; x_2', \; x_3, \; x_3', \; x$$

zuordnet, den Zeilen

$$2y_1', \; 2y_1, \; 2y_2', \; 2y_2, \; 2y_3', \; 2y_3, \; y.$$

Die Gleichungen, aus denen die Proportionalität der x und y erschlossen

werden soll, lauten in der ersten und zweiten Zeile genau wie (14); an Stelle der Gleichungen in der dritten Zeile treten die folgenden

$$(x_3' y_2' - x_2' y_3') + (x y_1 - y x_1) = 0, \ldots, \text{ und}$$
$$(x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x y_1' - y x_1') = 0, \ldots .$$

§ 4.

Konstruktion der Gruppe im Falle (G).

Unter $\mathfrak{g}$ verstehen wir fortan eine infinitesimale Gruppe linearer Transformationen, welche den im Problem B angegebenen Forderungen a) und b) genügt; aus diesen Forderungen heraus soll $\mathfrak{g}$ konstruiert werden. Die Methode der Konstruktion ist die gleiche wie R, Anh. 12, und wir stützen uns auf die dort gefundenen Resultate, insbesondere auf den Hilfssatz:

In einer infinitesimalen Gruppe, welche die Bedingung b) *erfüllt, existiert stets, geeignete Wahl des Koordinatensystems vorausgesetzt, entweder die Matrix*

$$G = \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{(Fall } G\text{)} \qquad \text{oder} \qquad H' = \begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{(Fall } H\text{)}.$$

Von einer Matrix schreiben wir nur einen rechteckigen Ausschnitt hin, wenn alle nicht dazugehörigen Felder mit 0 besetzt sind; im allgemeinen werden die Zeilen- und Kolonnennummern an den Rand geschrieben, aber die Numerierung ist überflüssig, wenn die Nummern von 1 ab in ununterbrochener Reihenfolge laufen. Leere Felder hat man sich mit einer 0 ausgefüllt zu denken, der $*$ dient zur Bezeichnung von Größen im Matrixschema, welche nicht benannt zu werden brauchen. Im Falle (H) haben wir hier die Bezeichnung des Koordinatensystems etwas abgeändert (nämlich x_1, x_2, x_3, x_4 ersetzt durch $x_1, x_4, -x_3, x_2$).

Im Falle (G) wurde weiter a. a. O. allein auf Grund der Voraussetzungen a) und b) bewiesen, daß alle zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Matrizen die Form haben müssen:

$$\lambda E + \left(\begin{array}{cc|c} \varrho & 0 & \alpha_3 \dots \alpha_n \\ 0 & -\varrho & \beta_3 \dots \beta_n \\ \hline \beta_3 & \alpha_3 & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \\ \beta_n & \alpha_n & \end{array}\right)$$

Der durch einen $*$ angedeutete Teil ist schiefsymmetrisch. Alle Operationen von $\mathfrak{g}$ gehören also der erweiterten Drehungsgruppe $\bar{\mathfrak{d}}_Q$ an, wobei

$$Q = -2x_1x_2 + (x_3^2 + \dots + x_n^2)$$

zu setzen ist. Außerdem zeigte sich, daß alle diejenigen Operationen, welche man aus dem Schema erhält, wenn man λ und das ganze Quadrat $*$ gleich 0 setzt, wirklich in $\mathfrak{g}$ vorkommen. Bringt man die Grundform Q auf die Gestalt (2), indem man x_1 und x_2 ersetzt durch

$$\frac{x_1 + i x_2}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \frac{-x_1 + i x_2}{\sqrt{2}},$$

so gehören demnach die Operationen

$$D^{(1\,i)}(i+1) \quad \text{und} \quad D^{(2\,k)}(k+2)$$

sämtlich zu $\mathfrak{g}$. Dann enthält $\mathfrak{g}$ aber auch die Operation

$$D^{(i\,k)} = [D^{(i\,1)}, D^{(1\,k)}] \quad (i \neq k;\ i, k = 3, \dots, n).$$

$\mathfrak{g}$ umfaßt somit die ganze Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ und ist enthalten in $\bar{\mathfrak{d}}$, darum entweder mit $\mathfrak{d}$ oder $\bar{\mathfrak{d}}$ identisch: die Gültigkeit der Sätze B′ und B″ im Falle (G) ist erwiesen. Viel komplizierter ist die andere Alternative.

§ 5.

Konstruktion der quadratischen Grundform im Falle (H).

Den durch eine lineare Abbildung L bewirkten Übergang von einem Vektor $\mathfrak{x}$ zu seinem Bilde $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}L$ bezeichnen wir durch einen Pfeil: $\mathfrak{x} \to d\mathfrak{x}$. Die Matrix H', welche im Falle (H) in der Gruppe $\mathfrak{g}$ vorhanden ist, kann, wenn $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots, \mathfrak{e}_n$ die Grundvektoren des Koordinatensystems bedeuten, so beschrieben werden:

$$\mathfrak{e}_1 \to -\mathfrak{e}_3 \to 0, \quad \mathfrak{e}_4 \to \mathfrak{e}_2 \to 0, \quad \mathfrak{e}_i \to 0 \quad (i = 5, \dots, n).$$

Ich rekapituliere zunächst, was in R, Anh. 12, weiter aus a) und b) und dem Vorkommen von H' erschlossen wurde. Durch geeignete weitere Normierung des Koordinatensystems ergab sich für die linke obere Ecke der allgemeinen Gruppenmatrix X, bis auf ein additiv hinzutretendes Multiplum ϱE der Einheitsmatrix, die nebenstehende Ausfüllung, in der die Größen mit Doppelindizes schiefsymmetrisch sind. Außerdem kommen in $\mathfrak{g}$ die folgenden drei Matrizen wirklich vor:

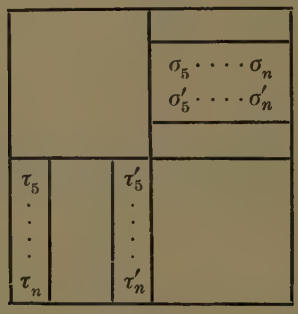
$$\left(\begin{array}{cc|cc} \varrho_1 & 0 & \lambda_{12} & \mu_{12} \\ 0 & -\varrho_1 & \mu'_{12} & \lambda'_{12} \\ \hline \lambda'_{21} & \mu_{21} & \varrho_2 & 0 \\ \mu'_{21} & \lambda_{21} & 0 & -\varrho_2 \end{array}\right)$$

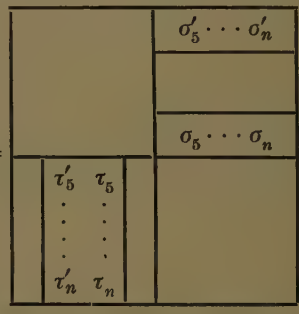
1. $H' = H'_{12} : \lambda'_{12} = 1$, alles andere (inkl. ϱ) $= 0$;
2. $H = H_{12} : \lambda_{12} = 1$, alles übrige (inkl. ϱ) $= 0$;
3. $J = J_{12} : \varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = -1$, alles übrige (inkl. ϱ) $= 0$.

Zu J gehört eine Einteilung in 5 unabhängige Länder mit den Multiplikatoren $0, +1, -1, +2, -2$, wie sie aus dem nebenstehenden Multiplikatorenschema M hervorgeht. Die Länder $+2$ und -2 sind schon vollständig bekannt. Die zu den Ländern -1 und $+1$ gehörigen Gruppenmatrizen haben die Gestalt S^- und S^+. Aus jeder Besetzung S^+ des Landes $+1$ bekommt man eine analoge Besetzung des Landes -1: $S^- = [S^+ H'_{12}]$. Umgekehrt erhält man aus einer Matrix S^-

M:

0	2	2	0	1
-2	0	0	-2	-1
-2	0	0	-2	-1
0	2	2	0	1
-1	1	1	-1	0

(18) $S^- =$ 

, $S^+ =$ 

zum Lande -1 gehörig, die gleichbesetzte Matrix S^+ des Landes $+1$ zurück durch Zusammensetzung mit H (oder besser mit $H_{21} = -H_{12}$): $S^+ = [S^- H_{21}]$. Alle bisherigen Angaben über die allgemeine Gruppenmatrix folgen aus dem Vorkommen von H' und J.

A. a. O. ging die Konstruktion nun so weiter. Von der allgemeinen zum Lande -1 gehörigen Gruppenmatrix S^- wurde gezeigt:

1) mit den Zeilengrößen σ, σ' verschwinden die Kolonnengrößen τ, τ';

2) die Zeilengrößen σ, σ' sind voneinander linear unabhängig. Doch stützte sich hier der Beweis nicht mehr allein auf die Forderungen a) und b); und wirklich lehren ja die Beispiele der Gruppen $\mathfrak{d}_7^*$ und $\mathfrak{d}_8^*$, daß aus jenen Voraussetzungen nicht mehr auf die Unabhängigkeit der σ, σ' geschlossen werden kann. An dieser Stelle müssen wir also von unserer alten Straße abbiegen und neue Wege einschlagen — die uns freilich zunächst wiederum zu dem Ziel 1) hinführen werden. Die Zusammensetzung von irgend zwei zum Lande -1 gehörigen Gruppenmatrizen S, S^* liefert die Gruppenmatrix

$$[S\,S^*] = \begin{array}{|cc|}\hline [\sigma\tau] & [\sigma\tau'] \\ [\sigma'\tau] & [\sigma'\tau'] \\ \hline \end{array}\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix}$$

$[\sigma\tau]$ bedeutet $\sum_{i=5}^{n}(\sigma_i\tau_i^* - \sigma_i^*\tau_i)$.

Also folgt

$$(19) \qquad [\sigma\tau] = 0, \quad [\sigma'\tau'] = 0, \quad [\sigma\tau'] + [\sigma'\tau] = 0.$$

In der allgemeinen Gruppenmatrix

$$X = \| \varrho_{ik} \|$$

ist das 1. Element der 2. Zeile ϱ_{21} identisch $= 0$; infolgedessen kann zufolge der Forderung b) zwischen den übrigen Elementen dieser Zeile keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen. Insbesondere sind die Größen $\sigma_5 \ldots \sigma_n$ in S^- voneinander linear unabhängig, und es existiert also eine zum Lande -1 gehörige Gruppenmatrix $S^- = S_0^-$, in welcher

$$\sigma_5 = 1, \qquad \sigma_6 = \ldots = \sigma_n = 0$$

ist. Verwenden wir sie als S^* in den Gleichungen (19) und setzen die zugehörige Spalte $\tau_i = g_{5i}$, so liefert die erste jener Gleichungen für die willkürliche Gruppenmatrix $S = S^-$:

$$\tau_5 = \sum_{i=5}^{n} g_{5i}\,\sigma_i.$$

So bekommen wir für alle Matrizen S^- gültige Gleichungen von der Form

$$(20) \qquad \tau_i = \sum_k g_{ik}\,\sigma_k, \qquad \tau_i' = \sum_k g_{ik}'\,\sigma_k'$$

mit konstanten Koeffizienten g_{ik}, g_{ik}'. Aus ihnen geht sofort hervor, daß mit den σ, σ' auch die τ, τ' verschwinden. Die ersten beiden unserer Gleichungen (19) liefern ferner, wenn wir sie auf irgend zwei zum Lande -1 gehörige Matrizen S, S^* anwenden, die Symmetrie der Konstantensysteme g_{ik} und g_{ik}'. Ferner ist die quadratische Form mit den Koeffizienten g_{ik} nicht-ausgeartet. Denn im Ausartungsfall könnte man $n-4$ Zahlen α_i bestimmen, welche nicht sämtlich verschwinden und den Gleichungen genügen

$$\sum_{i=5}^{n} \alpha_i\, g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad k = 5, \ldots, n.$$

Dann wäre für alle Matrizen S^- und S^+, Formel (18):

$$\sum_{i=5}^{n} \alpha_i\,\tau_i = 0;$$

und das hieße, daß die Ebene

$$\sum_{i=5}^{n} \alpha_i\, x_i = 0$$

gemeinsame konjugierte Ebene zu den beiden voneinander unabhängigen Vektoren e_1, e_3 wäre. Man kann also, indem man die Koordinaten $e_5, \ldots, e_n$ geeignet wählt, dafür sorgen, daß die Matrix

$$\|g_{ik}\| \quad (i, k = 5, \ldots, n)$$

sich auf die Einheitsmatrix reduziert und daher allgemein

$$\tau_i = \sigma_i$$

wird. Doch wollen wir uns nicht an diese besondere Normierung binden. Analoges ist über die g'_{ik} zu sagen. Es ist aber an dieser Stelle noch unmöglich, die Übereinstimmung der g'_{ik} mit den g_{ik} zu erkennen; unsere dritte Gleichung (19) sagt lediglich aus, daß

$$(21) \qquad \sum_{ik}(g'_{ik} - g_{ik})\,\sigma_i^*\,\sigma'_k$$

symmetrisch von den beiden Matrizen S, S^* abhängt.

Die Matrizen H' und J und damit alle bisherigen Resultate bleiben erhalten, wenn man die beiden Grundvektoren e_1 und e_4 unter sich transformiert und gleichzeitig e_3, $-e_2$ derselben linearen Transformation unterwirft. Die Tatsache, daß die σ_i in S^- voneinander unabhängig sind, läßt sich demnach sofort dahin verallgemeinern, daß die Größen

$$\alpha'\,\sigma_i - \alpha\,\sigma'_i$$

voneinander linear unabhängig sind, wenn α, α' irgend zwei feste Zahlen sind, welche nicht beide verschwinden. Es kann also keine Relation von folgender Form bestehen

$$(22) \qquad \alpha' \cdot \sum_i l_i\,\sigma_i - \alpha \cdot \sum_i l_i\,\sigma'_i = 0$$

mit konstanten Koeffizienten α, α'; l_i, ohne daß entweder α und α' beide verschwinden oder alle $l_i = 0$ sind. Daraus geht hervor, daß es ein S^- gibt, in welchem alle σ'_i, aber nicht alle σ_i verschwinden. Denn sonst wären die σ'_i allein die unabhängigen Parameter der linearen Schar der zum Lande -1 gehörigen Matrizen S^-, und es bestünden Gleichungen

$$\sigma_i = \sum_k c_{ik}\,\sigma'_k$$

mit konstanten Koeffizienten c_{ik}, gültig für alle S^-. Bestimmt man dann eine Zahl α und zugehörige nicht sämtlich verschwindende Größen l_i, so daß

$$\sum_i l_i\,c_{ik} = \alpha \cdot l_k$$

ist — das ist das bekanntlich stets lösbare Problem der Säkulargleichung —, so bekäme man eine Relation (22) mit $\alpha' = 1$. Ein bestimmtes S^-, in welchem alle σ'_i und damit nach (20) alle τ'_i verschwinden, werde mit A

bezeichnet, und in ihm sei $\sigma_i = \alpha_i$, $\tau_i = \beta_i$; die β_i sind nicht alle $= 0$. Es werden zwei Fälle zu unterscheiden sein, je nachdem

$$(\alpha\beta) = \sum_i \alpha_i \beta_i = \sum_{ik} g_{ik} \alpha_i \alpha_k \neq 0 \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist.

Im ersten Fall können wir annehmen, jene Summe sei $= 1$; wir führen $\sum_{i=5}^{n} \beta_i \mathfrak{e}_i$ als neuen Grundvektor $\mathfrak{e}_5$ ein und erzielen dadurch, daß $\beta_5 = 1$, alle übrigen β_i aber $= 0$ werden. Wegen der invarianten Bedingung $(\alpha\beta) = 1$ ist dann $\alpha_5 = 1$, und indem wir noch $\mathfrak{e}_6, \ldots, \mathfrak{e}_n$ ersetzen durch $\mathfrak{e}_6 - \alpha_6 \mathfrak{e}_5, \ldots, \mathfrak{e}_n - \alpha_n \mathfrak{e}_5$, erzwingen wir weiter $\alpha_6 = \ldots = \alpha_n = 0$. Also lautet die Abbildung A jetzt so:

$$\mathfrak{e}_1 \to \mathfrak{e}_5 \to \mathfrak{e}_2 \to 0, \qquad \mathfrak{e}_i \to 0 \quad \text{für alle andern} \quad \mathfrak{e}_i.$$

Damit kehren wir offenbar zu dem schon erledigten Fall (G) zurück.

Es bleibt also weiterhin nur die andere Möglichkeit $(\alpha\beta) = 0$ zu besprechen (welche $n \geqq 6$ voraussetzt). Hier werden wir $-\sum_i \beta_i \mathfrak{e}_i$ als neuen Grundvektor $\mathfrak{e}_5$ einführen:

$$\beta_5 = -1, \qquad \beta_6 = \ldots = \beta_n = 0; \qquad \alpha_5 = 0,$$

und darauf durch geeignete lineare Transformation der $\mathfrak{e}_6, \ldots, \mathfrak{e}_n$ untereinander erzwingen, daß außer $\alpha_5 = 0$ die Gleichungen $\alpha_6 = 1$, $\alpha_7 = \ldots = \alpha_n = 0$ herauskommen. Dann sieht A so aus:

$$\mathfrak{e}_1 \to -\mathfrak{e}_5 \to 0, \qquad \mathfrak{e}_6 \to \mathfrak{e}_2 \to 0; \qquad \mathfrak{e}_i \to 0 \quad \text{für alle übrigen } i.$$

Es ist also eine ganz analoge Matrix wie H'; nur ist das Indexpaar $(5, 6)$ an Stelle von $(3, 4)$ getreten. Wir bezeichnen dieses A darum mit H'_{13} im Gegensatz zu $H' = H'_{12}$. Auf Grund des Vorhandenseins von H'_{13} in der Gruppe wird sich ihre Organisation bis zur sechsten Variablen fortsetzen lassen. Wir möchten dazu gelangen, dem Teilquadrat in der linken oberen Ecke von X die nebenstehende Gestalt zu geben, wobei ein Glied $+\varrho E$ hinzuzufügen bleibt und die λ, λ', μ, μ' schiefsymmetrisch sind in ihren Doppelindizes. Jedes λ_{ik} für sich und ebenso jedes λ'_{ik} soll ein unabhängiges Land vorstellen — so daß neben H'_{12}, H'_{13} auch die Matrizen H'_{23}; H_{12}, H_{13}, H_{23} in $\mathfrak{g}$ vorkommen; und neben $J = J_{12}$ sollen die analog gebauten Matrizen J_{13} und $J_{23}\,(= -J_{12} + J_{13})$ in $\mathfrak{g}$ enthalten sein.

(23)

ϱ_1	0	λ_{12}	μ_{12}	λ_{13}	μ_{13}
0	$-\varrho_1$	μ'_{12}	λ'_{12}	μ'_{13}	λ'_{13}
λ'_{21}	μ_{21}	ϱ_2	0	λ_{23}	μ_{23}
μ'_{21}	λ_{21}	0	$-\varrho_2$	μ'_{23}	λ_{23}
λ'_{31}	μ_{31}	λ'_{32}	μ_{32}	ϱ_3	0
μ'_{31}	λ_{31}	μ'_{32}	λ_{32}	0	$-\varrho_3$

Indem man H'_{13} genau so verwendet wie H'_{12} zu Anfang dieses Paragraphen — man muß hier auf die Konstruktion in R, Anh. 12, zurückgreifen —, erhält man zunächst aus $[[XH'_{13}]H'_{13}]$ die Besetzung der mit einem $\square$ umrahmten Felder. Um J_{13} zu gewinnen, muß man die einmalige Zusammensetzung $[XH'_{13}]$ betrachten; doch soll dabei X sogleich als eine zum Lande $+1$ gehörige Gruppenmatrix S^+, Formel (18), spezialisiert werden, für welche

$$\sigma'_5 = 1,\ \sigma'_6 = \ldots = \sigma'_n = 0$$

ist. Man bekommt dann für $J^*_{13} = [S^+ H'_{13}]$ eine Gruppenmatrix, die sich als Abbildung so beschreiben läßt:

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 \to \mathfrak{e}_1 + \sigma_5 \mathfrak{e}_4 \mid \mathfrak{e}_3 \to \tau_6 \mathfrak{e}_2 \mid \mathfrak{e}_5 \to -\mathfrak{e}_5 \\ \mathfrak{e}_2 \to -\mathfrak{e}_2 \mid \mathfrak{e}_4 \to 0 \mid \mathfrak{e}_6 \to \mathfrak{e}_6 - \tau'_5 \mathfrak{e}_5 - (\tau'_7 \mathfrak{e}_7 + \ldots + \tau'_n \mathfrak{e}_n) \\ \qquad\qquad \mathfrak{e}_i \to 0 \quad (i = 7, \ldots, n). \end{cases}$$

In J^*_{13} sind also die in den Feldern (4,1) und (2,3) stehenden Elemente

$$\mu_{21} \text{ und } \mu'_{12} \quad \text{bzw.} \quad = \sigma_5 \text{ und } \tau_6.$$

Da wir schon wissen, daß allgemein $\mu'_{21} = -\mu'_{12}$ ist, muß somit $-\sigma_5 = \tau_6$ sein. Setzen wir diese Zahl $= \gamma$, schreiben im Einklang mit oben eingeführten Bezeichnungen in (24) an Stelle von $\tau'_i : g_{5i} = g'_i$ und führen statt der $\mathfrak{e}_i$ ein neues Koordinatensystem $\bar{\mathfrak{e}}_i$ ein durch die Gleichungen

$$\begin{array}{l|l|l} \bar{\mathfrak{e}}_1 = \mathfrak{e}_1 - \gamma \mathfrak{e}_4 & \bar{\mathfrak{e}}_3 = \mathfrak{e}_3 + \gamma \mathfrak{e}_2 & \bar{\mathfrak{e}}_5 = \mathfrak{e}_5 \\ \bar{\mathfrak{e}}_4 = \mathfrak{e}_4 & \bar{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{e}_2 & \bar{\mathfrak{e}}_6 = \mathfrak{e}_6 - \frac{1}{2} g'_5 \mathfrak{e}_5 - (g'_7 \mathfrak{e}_7 + \ldots + g'_n \mathfrak{e}_n) \\ & & \bar{\mathfrak{e}}_i = \mathfrak{e}_i \qquad (i = 7, \ldots, n), \end{array}$$

so bleibt der Ausdruck der Abbildungen $H' = H'_{12}$, H'_{13} und $J = J_{12}$ der gleiche. An Stelle von (24) aber bekommen wir

$$\begin{array}{l|l|l|l} \bar{\mathfrak{e}}_1 \to \bar{\mathfrak{e}}_1 & \bar{\mathfrak{e}}_3 \to 0 & \bar{\mathfrak{e}}_5 \to -\bar{\mathfrak{e}}_5 & \bar{\mathfrak{e}}_7 \to 0, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_n \to 0, \\ \bar{\mathfrak{e}}_2 \to -\bar{\mathfrak{e}}_2 & \bar{\mathfrak{e}}_4 \to 0 & \bar{\mathfrak{e}}_6 \to \bar{\mathfrak{e}}_6 & \end{array}$$

d. h. J_{13}. Auf J_{13} gründet sich eine analoge Ländereinteilung wie auf J_{12}. In ihr bilden die durch $\square$ umrahmten Felder für sich ein Land (mit dem Multiplikator $+2$) — und da λ_{13} nicht identisch 0 sein kann, tritt H_{13} in der Gruppe auf —, und es bilden die durch $\square$ umrahmten Felder ein eigenes Land mit dem Multiplikator -2; in ihnen muß daher ein Multiplum von H'_{13} stehen. Für die allgemeine Gruppenmatrix $X = \|\varrho_{ik}\|$ lieferte der Ausschnitt von $[XH'_{12}]$, welcher in dem J_{12}-Land mit dem Multiplikator -2 liegt, die Gleichungen

$$\varrho_{23} + \varrho_{41} = 0, \quad \varrho_{32} + \varrho_{14} = 0, \quad \varrho_{11} + \varrho_{22} = \varrho_{33} + \varrho_{44}.$$

Ebenso liefert jetzt der Ausschnitt von $[XH'_{13}]$, welcher in dem J_{13}-Land mit dem Multiplikator -2 liegt, die Beziehungen

$$\varrho_{25} + \varrho_{61} = 0, \quad \varrho_{52} + \varrho_{16} = 0, \quad \varrho_{11} + \varrho_{22} = \varrho_{55} + \varrho_{66},$$

d. h.

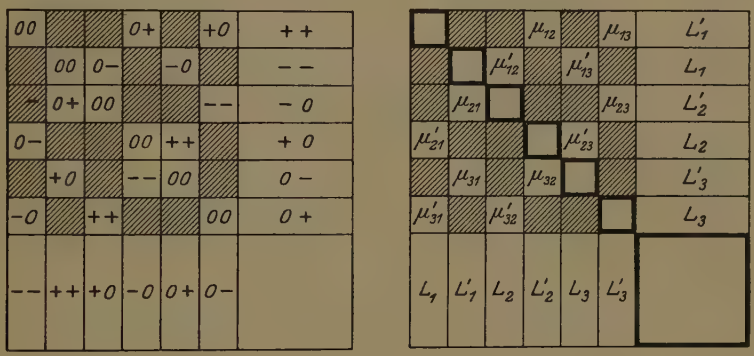
$$\mu'_{13} + \mu'_{31} = 0; \quad \mu_{31} + \mu_{13} = 0 \text{ und die beiden Felder } \varrho_3, -\varrho_3.$$

Die Umsetzung der beiden (auf J_{12} basierten) Länder -1, $+1$ ineinander mit Hilfe von H' und H:

$$S^- = [S^+ H'_{12}], \quad S^+ = [S^- H_{21}]$$

überträgt alle für das Indexpaar (1, 3) gewonnenen Resultate auf (2, 3), und unsere Behauptungen sind damit vollständig bewiesen.

Durch Überdeckung der Ländereinteilungen nach J_{12} und J_{13} erhalten wir eine Zerfällung der willkürlichen Gruppenmatrix X in unabhängige



Bestandteile. Im Schema sind die von den übrigen unabhängigen Felder, deren Ausfüllung schon vollständig bekannt ist und in denen die Multipla von

$$H_{12}, H_{13}, H_{23}; \; H'_{12}, H'_{13}, H'_{23}$$

stehen, schraffiert. Der an erster Stelle stehende Charakter $0, +, -$ bedeutet, daß das betreffende Feld zum J_{12}-Lande $0, +1, -1$ gehört, der an zweiter Stelle stehende Charakter kennzeichnet ebenso das J_{13}-Land. Außer den schraffierten Feldern bekommen wir also das Hauptland 00, das in dem Schema rechts aus den leer gelassenen und stark umrahmten Teilen besteht, und die sechs Nebenländer $L_1, L_2, L_3; L'_1, L'_2, L'_3$. Es gehören noch als isolierte Felder

$\mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{12}$ bzw. zu den Ländern L_1, L_2, L_3 und
$\mu'_{23}, \mu'_{31}, \mu'_{12}$ „ „ „ „ L'_1, L'_2, L'_3.

Die Organisation der Gruppenmatrix über die vierte Stelle hinaus bis zur sechsten hat uns vor allem dadurch unserem Ziel genähert, daß sie im wesentlichen zu einer Zersprengung der Doppelzeilen geführt hat, welche vorher in den Ländern S^- und S^+ miteinander verbunden waren. Freilich ist die Zersprengung wegen der isolierten Felder, welche an den Ländern L haften bleiben, nicht ganz vollständig; darin künden sich schon deutlich die Ausnahmegruppen $\mathfrak{d}_7^*$ und $\mathfrak{d}_8^*$ an.

Von den Gleichungen

$$\tau_i = \sum_{k=5}^{n} g_{ik}\sigma_k, \tag{20}$$

welche zwischen den Elementen des Landes S^-, Formel (18), bestehen, lauten nach unserer jetzigen Wahl des Koordinatensystems die ersten beiden

$$\tau_5 (= \lambda'_{31}) = -\sigma_6 (= -\lambda'_{13}), \quad \tau_6 (= \mu'_{31}) = -\sigma_5 (= -\mu'_{13}). \tag{25}$$

$\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	0
0	$\begin{matrix} g_{77}\cdots g_{7n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n7}\cdots g_{nn} \end{matrix}$

Das symmetrische Schema der g_{ik} hat also die nebenstehende Gestalt. Insbesondere hängen $\tau_7 \ldots \tau_n$ nur ab von $\sigma_7 \ldots \sigma_n$, und wenn man will, kann man durch geeignete Wahl von $e_7, \ldots, e_n$ dafür sorgen, daß diese Gleichungen die besondere Form bekommen:

$$\tau_i = \sigma_i \qquad (i = 7, \ldots, n). \tag{26}$$

Zu (25) analoge Gleichungen gelten für die g'_{ik}; infolgedessen ist $g_{ik} = g'_{ik}$, wenn einer der beiden Indizes $i, k = 5$ oder 6 ist. Aus (21) ergibt sich also die Symmetriebeziehung

$$\sum_{i,k=7}^{n} (g'_{ik} - g_{ik})\,\overset{*}{\sigma}_i \sigma'_k = \sum_{i,k=7}^{n} (g'_{ik} - g_{ik})\,\sigma_k \overset{*}{\sigma}'_i.$$

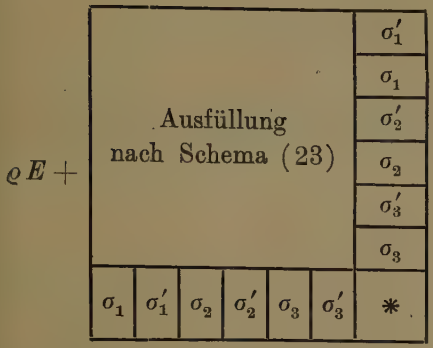
Da aber die Größen

$$\sigma_7, \ldots, \sigma_n; \quad \sigma'_7, \ldots, \sigma'_n$$

voneinander unabhängige Parameter sind, erschließt man daraus

$$g'_{ik} = g_{ik} \quad \text{für} \quad i, k = 7, \ldots, n.$$

Erst an dieser Stelle erkennen wir die Übereinstimmung der beiden quadratischen Formen mit den Koeffizienten g_{ik} und g'_{ik} $(i, k = 5, \ldots, n)$. Mit Hilfe von H'_{23}, H'_{31}, H'_{12} und H_{23}, H_{31}, H_{12} können die Länder L_1, L_2, L_3 gegenseitig ineinander umgesetzt werden und ebenso die Länder L'_1, L'_2, L'_3. Ist also dafür gesorgt, daß (26) gilt, so lautet das Schema der allgemeinen Gruppenmatrix wie folgt:



Das ist so zu lesen, daß z. B. in der mit σ_1 bezeichneten Zeile die gleiche Größenreihe steht wie in der mit σ_1 bezeichneten Spalte.

Um zum gewünschten Ziel zu kommen, bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß in dem durch einen * gekennzeichneten Quadrat eine schiefsymmetrische Matrix steht. Zu diesem Zweck setze man eine willkürliche zum Hauptlande (00) gehörige Gruppenmatrix $X = \| \varrho_{ik} \|$ mit einer zum Lande L_1 gehörigen Gruppenmatrix L_1 zusammen. $[XL_1]$ gehört wiederum zum Lande L_1. Ist $\sigma_7, \ldots, \sigma_n$ die (σ_1)-Zeile von L_1, so besteht die (σ_1)-Zeile von $[XL_1]$ aus den Zahlen

$$\sum_{k=7}^{n} \varrho_{ki}\sigma_k + \varrho_1\sigma_i \qquad (i = 7, \ldots, n),$$

für ihre (σ_1)-Spalte aber findet man

$$-\sum_{k=7}^{n} \varrho_{ik}\sigma_k + \varrho_1\sigma_i \qquad (i = 7, \ldots, n).$$

Die Übereinstimmung beider liefert, da $\sigma_7, \ldots, \sigma_n$ linear unabhängig voneinander sind, die Gleichungen

$$\varrho_{ki} + \varrho_{ik} = 0 \qquad (i, k = 7, \ldots, n).$$

Satz B′ ist damit erwiesen; die quadratische Grundform erscheint in der Gestalt

$$Q = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6) - (x_7^2 + \ldots + x_n^2).$$

§ 6.

Aufbau der Gruppe im Falle (H).

Tatsächlich haben wir aber, über dieses Resultat hinaus, schon wesentlich weitergehende Aufschlüsse über den Bau von $\mathfrak{g}$ gewonnen. Die lineare Schar derjenigen Gruppenmatrizen, für welche $\varrho = 0$ ist (oder die Spur verschwindet), werde mit $\mathfrak{g}^0$ bezeichnet; unsere Aufgabe ist, zu zeigen, daß die Gruppe $\mathfrak{g}^0$ notwendig mit $\mathfrak{d}$ übereinstimmt — außer für $n = 7$ und 8, wo noch die Möglichkeiten $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{d}_7^*$ bzw. $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{d}_8^*$ hinzutreten.

Von den Elementen des Landes L_1, d. s.

$$\mu_{23} \text{ und die Zeile } (\sigma_1)\colon \sigma_7, \ldots, \sigma_n$$

sind die $\sigma_7, \ldots, \sigma_n$ voneinander linear unabhängig. Die einzige Relation

mit konstanten Koeffizienten, welche zwischen den Elementen von L_1 bestehen kann, ist also eine Gleichung von der Form

$$\mu_{23} = l_7 \sigma_7 + \ldots + l_n \sigma_n. \tag{27}$$

Hier können die l nicht alle $= 0$ sein, da μ_{23} nicht identisch verschwinden darf. Genau die gleiche Relation gilt dann für die analog besetzten Länder L_2 und L_3. Ebenso kann zwischen

$$\mu_{23} \text{ und der Zeile } (\sigma_1'): \ \sigma_7', \ldots, \sigma_n'$$

des Landes L_1' (und dann auch des Landes L_2', L_3') eine derartige Beziehung

$$\mu_{23}' = l_7 \sigma_7' + \ldots + l_n' \sigma_n \tag{27'}$$

bestehen. An die Normierung $g_{ik} = \delta_{ik}$ für $i, k = 7, \ldots, n$ binden wir uns jetzt nicht.

Wir versuchen ebenso über die sechste Stelle hinauszuschreiten wie oben über die vierte: Wir wählen eine Matrix des Landes L_1, deren Element μ_{23} verschwindet; ist für seine Zeilenparameter $\sigma_7, \ldots, \sigma_n$

$$\sum_{i,k=7}^{n} g_{ik} \sigma_i \sigma_k \neq 0, \tag{28}$$

so kommen wir zum Falle (G) zurück. Falls *keine* Relation (27) besteht, ist diese Wahl immer möglich ($n \geqq 7$); wenn eine Relation (27) besteht, wenigstens dann, wenn $n \geqq 9$ ist. Denn eine nicht-ausgeartete quadratische Form (28) kann für alle Argumentwerte, welche eine gewisse Linearform $(\sum_{i=7}^{n} l_i \sigma_i)$ zum Verschwinden bringen, nur dann 0 sein, wenn es sich um eine Form von höchstens zwei Variablen handelt. Falls $n \geqq 9$, ist das Theorem B″ damit als richtig erkannt. In den Fällen $n = 8$ und $n = 7$ eröffnet sich eine neue Möglichkeit durch das Bestehen von zwei Relationen (27), (27′). Und zwar muß *im Falle* $n = 8$ die Relation (27) so beschaffen sein, daß aus dem Verschwinden der Linearform

$$l_7 \sigma_7 + l_8 \sigma_8 \tag{29}$$

das der quadratischen Form $g_{77} \sigma_7^2 + 2 g_{78} \sigma_7 \sigma_8 + g_{88} \sigma_8^2$ folgt. Durch eine geeignete lineare Transformation der Grundvektoren $\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$ kann man dann erreichen, daß jene $= \sigma_7$, diese $= -2\sigma_7 \sigma_8$ ist. Dann lautet das Schema der allgemeinen Gruppenmatrix von $\mathfrak{g}^0$ so, wie in Formel (11), § 3 angegeben wurde, und es bestehen die Relationen

$$\mu_{23} = \mu_{14}', \quad \mu_{31} = \mu_{24}', \quad \mu_{12} = \mu_{34}'.$$

Die Zusammensetzung zweier Gruppenmatrizen liefert darauf nach § 3, Formel (13):

$$[\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4, \mu_{23}] + [\lambda_{42}, \mu_{34} - \mu_{12}'] - [\lambda_{43}, \mu_{24} - \mu_{31}'] = 0.$$

Da bei festem

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4, \quad \mu_{34} - \mu_{12}', \quad \mu_{24} - \mu_{31}' \tag{30}$$

die Größen $\mu_{23}, \lambda_{42}, \lambda_{43}$ in der Gruppenmatrix noch völlig frei und unabhängig voneinander variieren können, folgt daraus das Verschwinden von (30). Die Gleichung $\mu_{14} = \mu'_{23}$ tritt sogleich hinzu, und es ist in diesem Falle $\mathfrak{g}^0$ also in der Ausnahmegruppe $\mathfrak{d}_8^*$ enthalten. Außerdem bestehen zwischen den $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ keine weiteren Relationen. Daß auch die Parameter des Hauptlandes keine Bedingung außer

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0$$

erfüllen, geht daraus hervor, daß in $\mathfrak{g}^0$ neben den beiden Matrizen J_{12}, J_{13} die analoge J_{14} vorkommt; J_{14} ist nämlich $= [H'_{14} H_{14}]$. Resultat: $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{d}_8^*$.

Im Falle $n = 7$ normieren wir $g_{77} = -2$. Dann hat jedenfalls die allgemeine Gruppenmatrix von $\mathfrak{g}^0$ die Gestalt (16), § 3. Man zerstört die Normalform nicht, wenn man die Variablen $x_1 x_3 x_5$ mit einem Faktor α versieht und $x_2 x_4 x_6$ mit dem inversen $\frac{1}{\alpha}$. Dann multiplizieren sich die μ_{ik} mit α^2, die μ'_{ik} mit $\frac{1}{\alpha^2}$, μ_i mit $\frac{1}{\alpha}$ und μ'_i mit α. Durch geeignete Verfügung über α kann man also dafür Sorge tragen, daß in (27) $l_7 = 1$ wird:

(31) $$\mu_{23} = \mu_1, \quad \mu_{31} = \mu_2, \quad \mu_{12} = \mu_3.$$

Durch Zusammensetzung irgend zweier Gruppenmatrizen und Anwendung der Relation $\mu_{23} = \mu_1$ auf die zusammengesetzte Matrix erhält man, unter Berücksichtigung der Beziehungen (31) für jede der beiden Einzelmatrizen, die Gleichung

$$-[\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, \mu_1] + 2(1 - l'_7)[\mu'_2 \mu'_3] = 0.$$

Weil bei festem $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ die Größen μ_1, μ'_2, μ'_3 in der Gruppenmatrix noch frei variieren können, findet man daraus

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0, \quad l'_7 = 1;$$

d. h. $\mathfrak{g}^0$ ist mit der Ausnahmegruppe $\mathfrak{d}_7^*$ identisch. (Daß sich neben $l_7 = 1$ auch $l'_7 = 1$ ergibt, ist der Normierung $g_{77} = -2$ zu verdanken.)

Um den Beweis von B″ vollständig zu machen, sind noch ein paar Bemerkungen über die niederen Dimensionszahlen $n = 6$ und $n = 4$ hinzuzufügen. Für $n = 6$ ist nach den bisherigen Resultaten entweder $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{g}^0$ gleich derjenigen linearen Teilschar von $\mathfrak{d}$ — vgl. das Schema (23) —, welche durch die eine Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0$$

definiert ist. Das letzte aber ist darum unmöglich, weil diese Teilschar keine Gruppe ist. Setzt man z. B. die Matrix, in welcher $\mu_{12} = 1$ ist, aber alle übrigen Parameter verschwinden, mit derjenigen zusammen, in welcher μ'_{12} der einzige nicht-verschwindende Parameter ist, so entsteht

die zum Hauptlande gehörige Matrix mit den Parameterwerten $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = 0$.

Im Falle $n = 4$ käme außer $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{d}$ noch die Möglichkeit in Frage, daß $\mathfrak{g}^0$ mit einer Teilschar von $\mathfrak{d}$ identisch ist, die durch eine oder mehrere Relationen zwischen den Parametern ϱ_1, $-\varrho_2$, μ_{12}, μ'_{12} definiert wird:

$$a_{11}\varrho_1 + a_{14}\mu_{12} + a_{41}\mu'_{21} - a_{44}\varrho_2 = 0. \tag{32}$$

(Jene Parameter stehen in den Kreuzungspunkten der ersten und vierten Zeile mit der ersten und vierten Kolonne.) Die Schlußweise, welche uns zu der Unmöglichkeit einer Relation (22) führte, lehrt aber hier, daß eine Gleichung (32) von der besonderen Form

$$a'_1(a_1\varrho_1 + a_4\mu_{12}) + a'_4(a_1\mu'_{21} - a_4\varrho_4) = 0$$

nicht bestehen kann, ohne daß alle vier Produkte

$$a'_1a_1,\ a'_1a_4,\ a'_4a_1,\ a'_4a_4$$

verschwinden; d. h. in einer Relation (32) darf die Determinante der a nicht verschwinden. Infolgedessen kann höchstens eine einzige unabhängige solche Relation bestehen. Da außerdem die Matrix

$$J\colon\ \varrho_1 = 1,\ -\varrho_2 = 1,\ \mu_{12} = 0,\ \mu'_{21} = 0$$

in $\mathfrak{g}^0$ vorkommt, muß die Spur $a_{11} + a_{44}$ der Matrix $\|a_{ik}\|$ $(i, k = 1, 4)$ Null sein. Ihre charakteristischen Wurzeln sind also entgegengesetzt gleich: α, $-\alpha$; außerdem ist die Determinante $-\alpha^2 \neq 0$. Infolgedessen kann man $\alpha = 1$ nehmen, und bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems — ich darf ja $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_4$ einer willkürlichen linearen Transformation unterwerfen, wenn nur gleichzeitig $\mathfrak{e}_3$ und $-\mathfrak{e}_2$ derselben Transformation unterliegen — wird

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Mit andern Worten: wenn überhaupt eine Relation besteht, muß sie so lauten: $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$. Wie im Falle $n = 6$ sieht man aber sofort, daß die durch diese Gleichung definierte lineare Teilschar von $\mathfrak{d}$ keine Gruppe ist.

Unsere Partie auf dem Schachbrett des Matrizenschemas ist zu Ende gespielt. So verwickelt sie im einzelnen auch sein mag, sie beruht — inkl. ihres ersten Teiles, der schon in *R*, Anh. 12, abgewickelt wurde — auf einem einzigen Konstruktionsgedanken, der jeden Schritt bestimmte und zäh bis zu Ende durchgeführt wurde. — *Es ist vom mathematischen Standpunkt bemerkenswert, daß nicht die sich zunächst darbietenden Eigenschaften, sondern die aus dem Raumproblem entspringenden zu einer ohne Ausnahme und für alle Dimensionszahlen gültigen Charakterisierung der Drehungsgruppe führen.*

(Eingegangen am 17. Februar 1922.)